

Lidia Pawlusińska*

Aktywność matematyczna dziecka w ujęciu profesor Anny Zofii Krygowskiej¹

Mathematical Activity of a Child According to Professor Anna Zofia Krygowska

Abstract: A leading Polish mathematics educator, Professor Anna Zofia Krygowska, devoted her entire life to searching for solutions that would help to overcome difficulties in learning mathematics. In her academic activity we will find many didactic proposals that we can successfully use in school practice to this day. This article focuses on one of these proposals – triggering students' mathematical activity. Actions specific to mathematical activity, i.e. defining, mathematizing and schematizing, deducing and reducing, algorithmizing or noticing and using analogies can be successfully initiated in mathematical education at the first educational stage.

Keywords: mathematical activity, teaching mathematics, early school education, Anna Zofia Krygowska.

* Lidia Pawlusińska (ORCID: 0000-0003-0311-9755) – dr, pracownik naukowo-dydaktycznym Wydziału Nauk Społecznych Uniwersytetu Szczecińskiego, kontakt: lidia.pawlusinska@usz.edu.pl.

1 Publikacja dofinansowana ze środków budżetu państwa w ramach projektu Ministra Edukacji i Nauki pod nazwą *Od Korczaka do Kulmowej. Dziecko i „język wczesnej edukacji”* nr projektu DNK/SP547378/2022. Kwota dofinansowania 56.870,00 złotych całkowita wartość projektu 67 070,00 złotych.

Kształcenie matematyczne to nic innego, jak rozwijanie aktywności matematycznej ucznia

Anna Zofia Krygowska²

Nauczanie oraz uczenie się matematyki nieprzerwanie absorbuje szerokie grono ludzi zainteresowanych pracą szkoły. Analiza wyników osiągnięć edukacyjnych uczniów z zakresu matematyki³ w badaniach międzynarodowych nadal daje niezadawalający obraz jakości kształcenia matematycznego na świecie. Tak też dzieje się w naszym kraju, gdzie krytyka nauczania matematyki dotyczy również edukacji wczesnoszkolnej⁴. Gdzie tkwi problem? Czy nie potrafimy znaleźć rozwiązań wspierających uczniów w rozwijaniu kompetencji matematycznych, czy może wymagania co do efektów kształcenia matematycznego zmieniają się jak w przysłowiowym kalejdoskopie? A może to, co dotychczas wybrzmiało w przestrzeni publicznej, nie zostało właściwie wykorzystane? Poszukiwanie odpowiedzi na te i wiele innych pytań z zakresu kształcenia matematycznego kieruje naszą uwagę na poglądy profesor Anny Zofii Krygowskiej dotyczące nauczania najmłodszych uczniów, czyli tych, którzy roz-

- 2 M. Ciosek, *O wpływie Anny Zofii Krygowskiej na dydaktykę matematyki w świecie*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego”, seria V: „Dydaktyka Matematyki”, 28 (2005) s. 147.
- 3 PISA – Program Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów; TIMSS – Międzynarodowe Badanie Wyników Nauczania Matematyki i Nauk Przyrodniczych.
- 4 E. Gruszczyk-Kolczyńska, *O kryzysie edukacji matematycznej dzieci. Rozpaczliwe wołanie o działania naprawcze*, „Matematyczna Edukacja Dzieci”, 1 (2016) s. 5–40; D. Klus Stańska, M. Nowicka, *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej*, Warszawa 2013; J. Filip, T. Rams, *Dziecko w świecie matematyki*, Kraków 2000; G. Treliński, *Integracja nauczania – uwarunkowania, praktyka*, w: *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka*, red. Z. Semadeni, E. Gruszczyk-Kolczyńska, G. Treliński, B. Bugajska-Jaszczot, M. Czajkowska, Kielce 2015, s. 197 – 223????; M. Dąbrowski, *Edukacyjna codzienność klasy trzeciej*, w: *Badanie umiejętności podstawowych uczniów klas trzecich klas szkoły podstawowej. Nauczyciel kształcenia zintegrowanego 2008 – wiele różnych światów?*, red. M. Dągiel, M. Żytko, Warszawa 2009, s. 125–175????; A. Kalinowska, *Wyniki badań trzecioklasistów jako diagnoza kontekstów nauczania matematyki w klasach najmłodszych*, „Ruch Pedagogiczny”, 2 (2014), s. 147–156.

poczynają przygodę z matematyką na poziomie doświadczania jej w sytuacjach konkretnych, z wykorzystaniem intuicji, na których nie ciążyą wyuczone mechanizmy rozwiązywania zadań matematycznych⁵.

Analizując poglądy prof. Krygowskiej na nauczanie matematyki, skoncentruję się na tych aspektach jej działalności naukowo-dydaktycznej, które odnoszą się do edukacji szkolnej, czyli tych świadomie przekazywanych przez nauczyciela zabiegającego o rozwój matematyczny swoich uczniów na pierwszym etapie edukacyjnym. Celem artykułu jest aktywność matematyczna dziecka jako ten aspekt, bez którego w żaden sposób nie możemy rozstrzygać o świadomym i aktywnym uczeniu się. Zanim jednak zagłębimy się w poglądy prof. Krygowskiej, przybliżę postać tej znamienitej uczoney.

Sylwetka Anny Zofii Krygowskiej i jej działalność naukowo-dydaktyczna

Wielka uczona, wspaniały matematyk, genialny dydaktyk – to określenia, które w niewielkim stopniu oddają działalność twórczyni nowoczesnej dydaktyki matematyki prof. Anny Zofii Krygowskiej (ur. 19 września 1904 r. we Lwowie – zm. 16 maja 1988 r. w Krakowie). Od wczesnych lat swojego życia Krygowska interesowała się matematyką i mimo zdolności humanistycznych podjęła studia matematyczne na Uniwersytecie Jagiellońskim (1923–1927). Po ich ukończeniu pracowała jako nauczycielka matematyki w krakowskich szkołach. To właśnie ten okres zawodowy, a także wcześniejsze doświadczenia związane z tajnym nauczaniem podczas drugiej wojny światowej oraz udzielanymi w latach licealnych korepetycjami, zwróciły jej uwagę na napotykaną przez innych trudności podczas uczenia się matematyki. Helena Siwek tak pisała o tym okresie w życiu Krygowskiej:

Doświadczenie tam zdobyte czyniły z niej mistrza w przewidywaniu trudności uczniów, w planowaniu ciekawych i głęboko uzasadnionych

5 Z. Krygowska, *Międzynarodowa Konferencja w Sprawach Nauczania Matematyki w Krakowie*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego”, seria II: „Wiadomości Matematyczne”, 4 (1961) nr 3, s. 291.

w matematyce i psychologii propozycji dydaktycznych, w dotarciu z wiedzą matematyczną do każdego ucznia⁶.

Należy zaznaczyć, że Krygowska doświadczeniem praktycznym kierowała się przez cały okres działalności naukowej. W swojej pracy koncentrowała się na koncepcjach kształcenia nauczycieli, rozwoju badań w zakresie dydaktyki matematyki oraz na działaniach związanych z reformowaniem nauczania matematyki w Polsce. Liczne artykuły w czasopismach naukowych i metodycznych, sprawozdania z konferencji, rozdziały w książkach dla nauczycieli matematyki, autorskie i współautorskie podręczniki do matematyki, popularyzowanie matematyki i poglądów na jej nauczanie podczas wykładów telewizyjnych dla nauczycieli szkół średnich i podstawowych, w tym dla nauczycieli nauczania początkowego, promowanie licznych prac doktorskich z zakresu dydaktyki matematyki, a także opieka naukowa nad pięcioma habilitacjami – to dowody jej zaangażowania w nieprzerwane dążenie do poszukiwania skutecznych rozwiązań w obszarze kształcenia matematycznego. Jednym z jej licznych sukcesów jest powołanie w 1958 r. Katedry Nauczania Matematyki (późniejszej Katedry Dydaktyki Matematyki), którą kierowała do czasu przejścia na emeryturę w 1974 r. To dzięki jej staraniom dydaktykę matematyki zaczęto postrzegać jako dyscyplinę naukową, nie zaś „słabszą” krewną matematyki teoretycznej⁷. Na łamach „Dydaktyki Matematyki” profesor Krygowska tak pisała o tej ważnej kwestii:

Dydaktyka matematyki jest nauką, której problematyka obejmuje wszelkie zagadnienia związane z uczeniem się i nauczaniem matematyki. Rozwija się ona dziś jako nauka autonomiczna, choć badania prowadzone w tej dziedzinie mają w dużej mierze charakter interdyscyplinarny. Jakkolwiek specyfika uczenia się i nauczania matematyki nie pozwala na całkowite ich włączenie do żadnej z innych rozwiniętych już dyscyplin, to te problemy pojawiają się i są rozważane na granicach tak różnych przedmiotowo i metodologicznie nauk, jak matematyka, jej metodologia i historia, psychologia, informatyka, cybernetyka, lingwistyka. Rozwiązywanie takich zagadnień granicznych

6 H. Siwek, *Profesor Krygowska – niezwykły człowiek, tytan pracy*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Seria V: Dydaktyka Matematyki”, 28 (2005) s. 85.

7 Tamże, *Anna Zofia Krygowska – w stulecie urodzin*, „Matematyka”, 6 (2004) s. 4–11.

wymaga integrowania różnych metod badawczych – od analiz teoretycznych począwszy do metod empirycznych rozmaitych typów⁸.

Działalność naukową Krygowskiej dostrzeżono także poza granicami naszego kraju. W 1956 r., podczas wystąpienia na konferencji UNESCO w Genewie poświęconej modernizacji nauczania matematyki, profesor wygłosiła referat na temat autorskiej koncepcji nauczania matematyki, czyli nauczania czynnościowego tego przedmiotu. Zaprezentowaną koncepcję przyjęto z wielkim entuzjazmem, a sam Jean Piaget gratulował prelegentce, podkreślając zgodność zaprezentowanego pomysłu z jego kognitywną teorią rozwoju człowieka⁹. Uczestnictwo w konferencjach międzynarodowych utwierdziło Krygowską w przekonaniu, że dostrzegana przez nią konieczność modernizacji nauczania matematyki jest zbieżna z tendencjami światowymi co do kierunku i konieczności ich realizacji. Profesor była przekonana, że wskazywana przez nią potrzeba aktywizowania uczniów w procesie poznawania matematyki jest jednym z priorytetów tych zmian¹⁰.

Kolejne ważne wystąpienie prof. Krygowskiej na arenie międzynarodowej odbyło się w 1970 r. w Nicei, kiedy poproszono ją o wygłoszenie wykładu w części plenarnej. Jako jedyna Polka została w taki sposób wyróżniona i uhonorowana. Mówiła wtedy o bardzo ważnej kwestii, która według niej stanowi podstawę powodzenia w nauczaniu matematyki, czyli o kształceniu przyszłych nauczycieli tego przedmiotu. Zresztą każde z wystąpień prof. Krygowskiej na kongresach i konferencjach międzynarodowych odbijało się szerokim echem w świecie nauki. Poruszała ona kwestie rozwijania aktywności matematycznej uczniów (Moskwa 1966), znaczenia tekstu matematycznego w nauczaniu (Lyon 1969), wyboru problemów badawczych w zakresie dydaktyki matematyki (Bayreuth 1971) oraz autorskiej koncepcji dydaktyki matematyki jako nauki (Exter 1972), kształcenia dzieci i młodzieży w wieku 10–16 lat (Karlsruhe 1976), nauczania geometrii (kongres belgijskich nauczycieli 1961), roli rachunku w nauczaniu matematyki (Arlon 1968), rozwijania rozumowania matematycznego czy

8 Z. Krygowska, *Główne problemy i kierunki badań współczesnej dydaktyki matematyki*, „Dydaktyka Matematyki”, 1 (1982) s. 14.

9 M. Ciosek, *O wpływie Anny Zofii Krygowskiej*.

10 Tamże.

identyfikowania problemów nauczania matematyki (Knokke 1970, 1972). Swoją uwagę skierowała również na modernizację nauczania początkowego (Budapeszt 1962) czy nauczania matematyki w szkole podstawowej (Wyszegrad 1974) i wiele innych¹¹. W jej działalności odnajdujemy ważne okresy związane z pracą w zagranicznych instytucjach naukowych, roztaczaniem opieki nad zagranicznymi stażystami przyjeżdżającymi do Krakowa, współpracą z czasopismami zagranicznymi („Educational Studies in Mathematics” czy „Recherches en Didactique des Mathematiques”) oraz publikacjami w językach obcych (55 prac w językach angielskim, czeskim, francuskim, hiszpańskim, japońskim, niemieckim, rosyjskim, rumuńskim, węgierskim i włoskim). Ważnym elementem działalności naukowo-dydaktycznej prof. Krygowskiej była także rozpoczęta w 1958 r. współpraca z Międzynarodową Komisją do Spraw Studiowania i Ulepszania Nauczania Matematyki CIEAEM. Celem, jaki przyświecał i przyświeca pracom komisji, jest ulepszanie nauczania matematyki. Jej główną działalnością jest organizowanie konferencji, na których nauczyciele matematyki, pedagodzy, psychologowie i dydaktycy matematyki z różnych stron świata dzielą się rezultatami swojej pracy. Ostatnia konferencja CIEAEM odbyła się w sierpniu 2023 r. w Malmö w Szwecji. Tym razem celem spotkania uczyniono matematyczne praktyki w jej nauczaniu oraz edukacyjne praktyki matematyczne w powiązaniu z innymi praktykami, w tym także ze szkolnictwem zawodowym, sztuką i aktualnymi zjawiskami społecznymi¹².

Prof. Krygowska była niezwykle cenioną osobą w Polsce i poza jej granicami. Uczeni z całego świata, których prace poruszały tematykę uczenia się i nauczania matematyki, podkreślali jej niezwykle zaangażowanie i profesjonalizm. Prof. Josette. Adda pisała, że Krygowska uczyniła nauczanie swoją pasją i potrafiła tę pasję przekazać innym. Prof. Henri Wermus uważał, że polska dydaktyk jest przykładem wielkiego pedagoga, ale także osobowością wyposażoną w autentyczny humanizm, prof. Hans Freudenthal kolei w przedmowie do swojej książki *Mathematics as an Educational Task* skierował słowa podziękowania dla prof. Krygowskiej „za wszystko, czego miał okazję się od niej nauczyć”¹³.

11 Tamże, s. 131–135.

12 Strona CIEAEM, <https://sv-se.eu.invaajo.com/event/cieaem/cieaem74>, dostęp: 15.03.2023.

13 M. Ciosek, *O wpływie Anny Zofii Krygowskiej*.

Aktywności uczniów w procesie uczenia się matematyki

Profesor Krygowska już w latach siedemdziesiątych ubiegłego stulecia pisała: „Chcemy bowiem dziś nie tylko uczyć matematyki, chcemy kształcić przez matematykę”¹⁴. Kształcenie przez matematykę rozumiała jako konieczność wykorzystania specyficznych cech matematyki do intelektualizacji postaw młodego człowieka, by świadomie mógł wykorzystywać teoretyczne myślenie do rozwiązywania problemów matematycznych i tych występujących poza matematyką. Wskazywała na konieczność rozwijania intuicji numerycznych, wielkościowych i przestrzennych niezbędnych do całościowego ujmowania otaczającej nas rzeczywistości. Dostrzegała potrzebę kształtowania umiejętności posługiwania się językiem matematyki oraz znajomości specyficznych dla matematyki metod, które są szeroko wykorzystywane w świecie technologii, a bez znajomości których korzystanie z tychże technologii byłoby utrudnione. Silnie akcentowała konieczność opanowania technik uczenia się matematyki oraz korzystania z różnych źródeł matematycznych, niezbędnych – według niej – do wypracowania ogólnych technik uczenia się, gdyż w epoce, w której „stałe uczenie się jest formą bycia człowiekiem”, umiejętności te są nieodzowne. Uważała wreszcie, że matematyczne kształcenie szkolne, mimo że ograniczone co do zakresu treści, nie powinno zamykać drogi do dalszego kształcenia matematycznego, jeśli tylko byłoby ono zgodne z życiowymi planami ucznia¹⁵. Uzasadniając w taki sposób konieczność kształcenia matematycznego, jednocześnie określała nauczanie matematyki nie jako przekazywanie *a priori* przyjętych treści nauczania czy opanowanie procedur matematycznych z mozołem wypracowanych podczas zajęć szkolnych, ale jako dziedzinę, której doświadczanie podczas uczenia się daje szerokie możliwości jej zastosowania – przede wszystkim umożliwia transfer na inne dziedziny wiedzy. Wyraźnie akcentowała, że nauczanie należy rozumieć jako sterowanie uczeniem się matematyki¹⁶.

Poszukując odpowiedzi na pytanie o kształt nauczania matematycznego, prof. Krygowska sformułowała trzy poziomy celów, które jej zdaniem określają

14 Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, część 1, Warszawa 1979, s. 13.

15 Taż, *Koncepcje powszechnego matematycznego kształcenia*, Kraków 1981, s. 48–49.

16 Taż, *Zarys dydaktyki matematyki*, część 2, Warszawa 1977, s. 14.

kształt edukacji matematycznej. Pierwszy poziom obejmuje podstawowe wiadomości i umiejętności w dziedzinie matematyki, czyli te, które obecnie odnajdziemy w podstawach programowych kształcenia ogólnego dla danego etapu edukacyjnego. To nic innego jak treści nauczania sformułowane w języku wymagań, np. porównuje liczby, mnoży i dzieli w pamięci w zakresie tabliczki mnożenia, opisuje rozwiązanie zadań za pomocą działań, równości z okienkiem, rysunkiem lub w inny wybrany przez siebie sposób, stosuje znaki: $<$, $=$, $>$, oblicza obwody prostokątów¹⁷. Drugi etap obejmuje postawy i zachowania właściwe dla aktywności matematycznej oraz pewnej świadomości uczniów dotyczącej niektórych elementów matematycznej metodologii, takich jak aktywna postawa wobec problemów matematycznych oraz dyspozycja do ich dostrzeżenia i formułowania, umiejętność posługiwania się pewnymi strategiami podczas rozwiązywania problemów, pewien poziom wyobraźni przestrzennej zorganizowanej geometrycznie, aktywna postawa w toku poszukiwania uzasadnień i rozumienie ich sensu, czy te wprost zapisane w podstawie programowej, takie jak rozwijanie umiejętności krytycznego i logicznego myślenia, rozumowania, argumentowania i wnioskowania¹⁸. Postawy i zachowania właściwe dla aktywności matematycznej rozwijają się (i powinny się rozwijać) stopniowo w toku uczenia się treści i kształtowania umiejętności określonych podstawą programową. Trzeci, najwyższy w hierarchii poziom celów obejmuje postawy i zachowania intelektualne funkcjonujące poza aktywnością matematyczną, rozwijane przez transfer oraz dostosowanie postaw i specyficznych zachowań do innych dziedzin aktywności ludzkiej¹⁹. Osiągnięcie tego poziomu celów prof. Krygowska uznała za najwyższy cel podejmowania działań w zakresie nauczania matematyki. Wskazując kolejne piętra „wtajemniczenia” w istotę

17 Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełną sprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej (Dz.U. z 2017 r., poz. 356).

18 Tamże.

19 Tamż, *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*, „Dydaktyka Matematyki”, 6 (1986) s. 25–41.

kształcenia matematycznego, przestrzegała nas przed zbytnim koncentrowaniem się na realizacji celów z pierwszego poziomu. Zwracała uwagę, że przyswajanie wiadomości i kształtowanie umiejętności nie jest równoznaczne z kształtowaniem postaw i zachowań właściwych dla aktywności matematycznej, a już na pewno nie jest równoznaczne z realizacją celów poziomu trzeciego²⁰.

Jednak nawet najwznioślejsze cele nie gwarantują sukcesu, gdy brakuje zaangażowania w ich osiągnięcie. Krygowska przekonywała nas, że zasada aktywnego i świadomego udziału ucznia w procesie nauczania jest przewodnią i stanowi warunek konieczny do realizacji innych zasad nauczania²¹ formułowanych w teoriach pedagogicznych. To właśnie zasada świadomego i aktywnego udziału ma zagwarantować, że uczący się z pełnym zaangażowaniem swej wyobraźni i myślenia oraz świadomie, przy pełnym rozumieniu kolejnych czynności konkretnych, wyobrażonych i umysłowych będzie wyzwalał aktywność matematyczną. A tę prof. Krygowska uważała za jeden z najważniejszych celów nauczania matematyki²². Podkreśla, że

im bardziej racjonalnie z punktu widzenia matematyki i psychologii organizujemy poglądowe podstawy matematyki elementarnej, im poprawniej ukierunkowujemy tę poglądowość w stronę właściwej matematyzacji, tym pełniej i łatwiej aktywizujemy wyobraźnię matematyczną i myślenie matematyczne ucznia²³.

Jednocześnie wskazywała, że przyjmując jako wiodącą zasadę świadomego i aktywnego udziału ucznia w procesie nauczania, koncentrujemy naszą uwagę na kształtowaniu technik uczenia się matematyki. To właśnie uczenie się matematyki czyni aktywność ucznia zorganizowaną²⁴.

Wśród pojawiających się w toku uczenia się matematyki aktywności uczniów prof. Krygowska wyszczególniła przejmowanie i asymilowanie wiedzy matematycznej, np. w formie wykładu, tekstu matematycznego, dysku-

20 Tamże, s. 27.

21 Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, część 2, s. 3.

22 Tamże.

23 Tamże.

24 Tamże.

sji czy filmu matematycznego, ćwiczenia elementarnych sprawności matematycznych, rozwiązywania zadań z zastosowaniem opanowanych metod matematycznych, redagowania tekstów matematycznych, zapisywania notatek, ilustrowania schematami sytuacji zadaniowych czy kształtowania umiejętności posługiwania się językiem matematycznym. Szczególną uwagę poświęciła kategorii „aktywność twórcza”. Uważała, że uczeń jest twórczy na lekcjach matematyki, gdy dostrzega i formułuje problemy, konstruuje i definiuje pojęcia, odkrywa subiektywnie nowe twierdzenia, uogólnia oraz stosuje matematykę do rozwiązywania problemów z innych dziedzin, w tym także w sytuacjach niestandardowych²⁵. Z tą kategorią prof. Krygowska mocno wiązała ważne dla działalności matematycznej aktywności i wskazywała je jako możliwe do prowokowania na każdym poziomie nauczania. Wśród nich wyróżniła: dostrzeganie i wykorzystywanie analogii, schematyzowanie, definiowanie pojęć, interpretowanie i racjonalne wykorzystywanie definicji, dedukowanie i redukowanie, kodowanie, konstruowanie i racjonalne stosowanie języka symbolicznego, algorytmizowanie oraz racjonalne posługiwanie się algorytmami²⁶. Nazywała je aktywnościami matematycznymi i przestrzegała przed ich wzajemną izolacją. Uzasadniała, że w toku pracy twórczej ucznia aktywności te przenikają się wzajemnie i często uzupełniają, co jest ich niewątpliwą zaletą.

Aktywności matematyczne dziecka

Dostrzeganie i wykorzystywanie analogii

W opiniach matematyków analogia i jej wykorzystywanie stanowi istotny mechanizm matematycznej twórczości – tak przekonywała nas prof. Krygowska, odwołując się do słów jednego z najwybitniejszych polskich matematyków, Stefana Banacha. Dodawała, że matematycy stale posługują się analogią na każdym poziomie swoich rozważań, tj. na intuicyjnym w obrębie zarysowujących się idei oraz na poziomie formalnym wtedy, gdy identyfikują struktury na podstawie morfizmów²⁷. Powszechność analogii w działalności mate-

25 Tamże, s. 14.

26 Z. Krygowska, *Elementy aktywności matematycznej*.

27 Tamże.

matycznej jest niepodważalna, zresztą w innych dziedzinach również. Analogia powinna zatem pojawić się w nauczaniu matematyki jako narzędzie myślenia i badania, jako narzędzie umożliwiające uczniom porządkowanie w ich umysłach tego, co dostrzegają w otaczającej rzeczywistości.

Nie tylko na gruncie matematyki podejmowano wiele prób definiowania analogii. Początkowo była ona definiowana jako proporcja, czyli równość stosunków $a : b = c : d$, gdy na podstawie trzech danych wielkości możemy wyznaczyć czwartą²⁸. Analogia to (z gr.) podobieństwo, odpowiedniość. George Polya, uwzględniając etymologiczne pochodzenie terminu, wskazywał, że jest to podobieństwo pewnego rodzaju, czyli takie, które w rozpatrywanych obiektach umożliwia wskazanie pewnych relacji pomiędzy ich elementami²⁹. Jan Filip i Tadeusz Rams uzupełnili, że w matematyce analogię możemy rozpatrywać w kilku sytuacjach, np. wtedy, gdy dostrzega się te same relacje między elementami rozpatrywanych obiektów (relacja równoległości boków w kwadracie oraz krawędzi w sześcianie), oraz gdy między rozpatrywanymi obiektami wskazujemy odwzorowanie zachowujące pewne relacje (relacja inkluzji między kwadratem i prostokątem oraz sześcianem i prostopadłościanem)³⁰.

Odnosząc analogię do sytuacji szkolnych na pierwszym etapie edukacyjnym, najprościej możemy powiedzieć, że uczeń stosuje analogie wówczas, gdy na podstawie dostatecznie sobie znanego faktu matematycznego orzeka o innym, który jest do niego podobny. Aby mógł tego dokonać, musi znać cechy pierwszego i dostrzegać je w tym drugim oraz wyszczególnić w pierwszym te własności, które zamierza przypisać drugiemu (np. gdy uczniowie, uzupełniając tabelki funkcyjne na dodawanie, stawiani są przed koniecznością uzupełnienia tabelek funkcyjnych na odejmowanie). Prof. Krygowska podkreślała, że już na początku nauczanie matematyki nie byłoby możliwe bez wykorzystywania analogii³¹:

Uogólnienia i wielkie syntezy, tak charakterystyczne dla współczesnej matematyki, to wyrażone językiem matematycznym analogie. Zmysł

28 J. Konior, *Wnioskowanie przez analogię i potrzeba jego rozwijania w edukacji matematycznej*, „Nauczyciel i Szkoła”, 1–2 (2004) s. 71.

29 G. Polya, *Jak to rozwiązać?*, tłum. L. Kubik, Warszawa 1964.

30 J. Filip, T. Rams, *Dziecko w świecie matematyki*, s. 36–37.

31 Tamże.

analogii odgrywa zasadniczą rolę w rozwijaniu się naszej intuicji w dziedzinie matematyki³².

Krygowska rekomendowała analogię jako tę aktywność, która otwiera szerokie możliwości również przed uczniami słabszymi. Dostrzega, że wykorzystywane przez nich proste podobieństwa i skojarzenia mogą stanowić podstawę formowania się elementarnych pojęć. Ponadto poszukiwanie tego, co się zmienia w pewnych transformacjach rozpatrywanych obiektów, prowadzi do analogii strukturalnej, analogia procedur może zaś być wykorzystywana do kształtowania umiejętności świadomego posługiwania się metodami matematycznymi³³. Uczona pisała:

[...] na każdym kroku, dokoła każdego elementu treści nauczania można koncentrować rozmaite aktywności uczniów, ukierunkowane na percepcję specyficznej analogii, istotnej w danej sytuacji, na transfer własności z jednej sytuacji do innej, ujętej jako analogiczna, na uogólnienia, na hipotezy, na dostrzeganie nowych problemów itp.³⁴.

Z całą stanowczością twierdzi też, że aby rozwijać zmysł analogii u uczniów, powinniśmy zaniechać demonstrowania im analogii na przykładach. Tu konieczna jest taka organizacja zajęć, która prowokuje naszych uczniów do dostrzegania analogii i ich wykorzystywania³⁵.

Matematyzacja i schematyzacja

Za jedną z głównych aktywności matematycznych prof. Krygowska uznawała matematyzację. Polega ona na porządkowaniu wszystkiego, co nas otacza, za pomocą matematycznych środków. Matematyzację postrzega się również jako proces odpowiadający za „transformację” dostrzeżonej rzeczywistości w abstrak-

32 Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, część 1, s. 13.

33 Tamże, *Elementy aktywności matematycznej*, s. 31.

34 Tamże, s. 3.

35 Tamże.

cyjny świat matematyki³⁶, a umiejętność jej wykorzystywania opisuje się jako uniwersalną ludzką zdolność, taką jak zdolność mówienia czy przedstawiania rysunkiem³⁷. Takie ujmowanie matematyzacji wskazuje na rangę, jaką należy jej nadać w nauczaniu szkolnym, tym bardziej że wprowadzenie uczniów w stosowanie metod matematycznych jest ważnym celem edukacji szkolnej.

Okazji do inicjowania tego procesu możemy doszukać się na każdej lekcji, chociażby wtedy gdy uczniowie poszukują odpowiedzi na postawione w zadaniu tekstowym pytanie albo planują rozmieszczenie ławek w sali na uroczystość z okazji Dnia Babci i Dziadka. Istotną cechą matematyzacji jest to, że oprócz możliwości uzyskania odpowiedzi w konkretnych sytuacjach, kryje się za nią perspektywa dostrzeżenia struktury całej matematyki, porządkowania elementów teorii czy oceniania skutków podejmowanych działań i obranych kierunków poszukiwań³⁸. Rola, jaką przypisuje się matematyzacji, przekonuje nas, że należy uczynić ją stałym, planowym elementem nauczania szkolnego.

Matematyzacją w nauczaniu prof. Krygowska nazwała „konstrukcję matematycznego schematu dla jakiegoś układu stosunków, ujętego przez analizę rzeczywistej, wyobrażonej lub już abstrakcyjnej sytuacji, lub sprecyzowanego w innej dziedzinie pojęć, np. w innej nauce”³⁹ bądź też „konstrukcję jeszcze na wpół pogładowego schematu myślowego, który w dalszym ciągu nauki mógłby być przekształcony i włączony do pełnego już schematu matematycznego”⁴⁰.

W tym pierwszym przypadku uczeń poszukuje schematu matematycznego w znanej mu teorii matematycznej. Dostrzeżone przez niego stosunki ujmuje w schemat, który mógłby być bezpośrednio włączony do tej teorii, a przede wszystkim jest rozważany na gruncie tej teorii za pomocą środków w niej dostępnych. Mówimy wtedy, że uczeń zbudował schemat matematyczny. Natomiast w drugim przypadku uczeń opiera swoją konstrukcję jeszcze na wpół pogładowym

36 G. Treliński, *Matematyzowanie jako składowa kompetencji matematycznej*, „Matematyczna Edukacja Dzieci”, 1 (2016) s. 67.

37 A. W. Bell, *The Learning of Process Aspects of Mathematics*, „Educational Studies in Mathematics”, 10 (1979) s. 361–387, <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00314662#citeas>, dostęp: 7.04.2023.

38 G. Treliński, *Matematyzowanie jako składowa*.

39 Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, część 1, s. 48.

40 Tamże, s. 48.

schemacie myślowym, który nie powstał na podstawie żadnej teorii matematycznej i który nie jest schematem matematycznym i nie może być bezpośrednio włączony do żadnej teorii. Krygowska nazwała ten etap matematyzacją wstępną, prymitywną lub pogładową. Mimo to uczyniła go niezwykle istotnym dla konstrukcji wiedzy matematycznej ucznia, o ile od samego początku został właściwie przez nauczyciela ukierunkowany na późniejszą matematyzację. Przestrzegając, że niewłaściwe planowanie procesu dydaktycznego prowadzącego do budowania wstępnych schematów (schematów myślowych) jest źródłem wielu późniejszych matematycznych trudności uczniów⁴¹. Uważam za w pełni zasadny pogląd prof. Krygowskiej, że „matematyzację doświadczeń i intuicji ucznia powinno się przeprowadzać możliwie wcześnie, możliwie radykalnie, możliwie od początku czysto z punktu widzenia matematyki, choć zawsze w sposób naturalny”⁴².

Z matematyzacją nierozzerwalnie powiązana jest schematyzacja, którą identyfikuje się jako jeden z mechanizmów matematyzacji. Polega ona na wyizolowaniu z pewnej struktury faktów, czyli cech istotnych, na których podstawie, za pomocą języka matematyki, konstruujemy schemat. Utworzony ze względu na potrzebę uproszczenia rozważanej sytuacji i uzależniony od przyjętego a priori stopnia dokładności w praktyce szkolnej schemat przybiera różne formy, spełnia różne funkcje i może mieć różne znaczenia.

Ze schematyzacją w edukacji wczesnoszkolnej spotykamy się bardzo często. Najczęściej odwołujemy się do schematów materialnych w postaci rysunku, grafu czy fizycznego modelu wyciętego z kartki papieru. W takich sytuacjach czynności myślowe uczniów skupiają się na wyodrębnieniu pewnej szczególnej struktury spośród bogactwa struktur istotnych dla badanej sytuacji⁴³. Ukierunkowuje to naszą uwagę na fakt, że schematyzacja nie występuje w izolacji od pozostałych aktywności matematycznych, chociażby analogii, bez której konstrukcja schematu nie byłaby możliwa. To właśnie dostrzeganie podobieństw w obiektach matematycznych czy relacjach między nimi ułatwia konstrukcje schematu i – co więcej – umożliwia konstruowanie wiedzy matematycznej jako spójnej struktury.

41 Tamże, s. 49.

42 Tamże, s. 79.

43 Z. Krygowska, *Elementy aktywności matematycznej*.

Kolejną aktywnością ściśle wiążącą się ze schematyzowaniem jest kodowanie, gdyż bez odpowiednio przyjętego przez ucznia kodu podczas konstruowania schematu nie uzyskamy odpowiedniej reprezentacji badanej sytuacji. Oczywiście schematyzacja nie kieruje naszych wysiłków na budowanie schematów przypisanych do konkretnie rozpatrywanej sytuacji. Nasze nauczycielskie starania powinny zmierzać do skierowania uwagi uczniów na możliwości zastosowania zbudowanego schematu w różnych sytuacjach. Dzieje się tak wtedy, gdy opisana za pomocą schematu sytuacja, poprzez analogię i właściwie zastosowany kod, uczyni powstały schemat ogólniejszym, pretendującym do miana algorytmu. To w tym aspekcie prof. Krygowska wskazywała na wielwartościowość jako konstytutywną cechę schematu. Jednak aby przekonać uczniów do takiego rozumienia roli schematu, potrzebna jest odpowiednia liczba doświadczeń. Doświadczeń, które kończą się samodzielnymi konstrukcjami schematów oraz poszukiwaniem analogicznych sytuacji, w których również można je wykorzystać. Jest to bardzo ważny proces, który myśl ucznia w naturalny ukierunkowuje na generalizację⁴⁴.

Definiowanie, interpretowanie danej definicji, racjonalne używanie definicji

Matematyka dysponuje pewnym zasobem pojęć, za pomocą których opisuje swoje dokonania. Podobnie jest w innych dziedzinach nauki. Różnicę natomiast dostrzegamy w charakterze tych pojęć, która niestety wiąże się z największą barierą ujawniającą się podczas uczenia się matematyki, czyli ich abstrakcyjnością. Brak odpowiedników w rzeczywistym świecie utrudnia uczniom rozumienie tych pojęć, a nauczycielom stawia wysokie wymagania w zakresie planowania, konstruowania i realizacji lekcji matematyki. Prof. Krygowska wskazała dwie drogi wprowadzania pojęć matematycznych, z którymi wiążą się odmienne podejścia do nauczania. Żadnej z nich nie negowała, a jedynie podkreśliła, że inicjują one różne aktywności poznawcze uczniów⁴⁵. Pierwsza droga to prezentowanie nowej definicji przez nauczyciela lub podręcznik. Tu fundamentalną aktywnością ucznia jest odformalizowanie zapisu werbalnego lub symbolicznego oraz

44 Tamże.

45 Taż, *Zarys dydaktyki matematyki*, część 2, s. 79.

podanie przykładów lub kontrprzykładów. Druga obejmuje taką organizację aktywności poznawczej, w której przy dyskretnym wsparciu nauczyciela uczeń sam dostrzega pewien fakt i formułuje jego definicję. Cechą właściwie rozróżniającą te drogi jest podejście do ich kształtowania. Wybierając pierwszą, budujemy uczniowskie rozumienie pojęć na bazie interpretacji opisanego faktu, w drugim przypadku rozumienie pojęcia wyprzedza jego definicję.

Definicja rozumiana jest jako pewna konwencja, która sformułowana na gruncie danej teorii, ściśle oparta na funkcjonujących w jej zakresie regułach syntaktycznych, pozwala zastępować nam jeden zapis innym. To zastępowanie, nazywane konstruowaniem definicji, Krygowska wskazała jako aktywność bogatą w różne procedury intelektualne, takie jak porównywanie, abstrahowanie, uogólnianie, analizę czy syntezę. Za równie ważne w procesie kształtowania pojęć uznała poprawną interpretację definicji oraz racjonalne korzystanie z definicji. Te dwie aktywności wskazywała jako możliwości budowania pomostu między dotychczasowymi intuicjami matematycznymi dziecka i obrazami niezdefiniowanego pojęcia a formalnymi wymaganiami matematyki. Wszystkie wymienione aktywności uważa za niezbędne w praktyce szkolnej⁴⁶.

Koncentrując się na dydaktycznym aspekcie konstruowania, interpretowania i racjonalnego stosowania definicji, skupimy się na jej semantycznym znaczeniu, czyli na opisie danego obiektu adekwatnie do tego, co uczeń chce zdefiniować⁴⁷. Jedne z pierwszych prób charakteryzowania obiektów czy faktów matematycznych przypadają na okres wczesnoszkolny. Jednak na tym etapie nie możemy oczekiwać definiowania pojęć matematycznych w ścisłym tego słowa znaczeniu. Jest to początek przygody z matematyką szkolną, kiedy, jak podaje prof. Krygowska, możemy spodziewać się wyjaśnienia lub opisu definicyjnego i tych właśnie powinniśmy wymagać⁴⁸.

Pierwsze dziecięce próby definiowania pojęć są wyrażone w języku potocznym i uzbrojone w poznane wcześniej terminy matematyczne. Często bywają nieprecyzyjne i z reguły koncentrują się na cechach, które uczeń dostrzegł w rozpatrywanym uprzednio modelu danego pojęcia lub na tym, do czego

46 *Taż, Elementy aktywności matematycznej.*

47 *Taż, Zarys dydaktyki matematyki, część 3, Warszawa 1977, s. 95.*

48 *Tamże, s. 94.*

go wykorzystywał. Takie opisy lub wyjaśnienia Krygowska nazywała prymitywnymi lub bezpośrednimi. Poza nimi, jako kolejny stopień „wtajemniczenia” w proces definiowania, wyróżniła opis generalizujący, czyli uwzględniający uzmiennienie stałych oraz opis konstruujący, polegający na modyfikowaniu wstępnej idei i niejasnego opisu w kierunku definicyjnego ujęcia danego pojęcia. Wskazuje je wszystkie jako niezbędne etapy długiej drogi prowadzącej do definicji formalnej⁴⁹.

W kontekście edukacji wczesnoszkolnej naszą uwagę przykuwa opis lub wyjaśnienie definicyjne, nadal tkwiące w pewnym uniwersum, mocno jeszcze ograniczonym przez dziecięce zasoby językowe i dotychczas przyswojone reguły. Mimo to uczeń, definiując jakiś obiekt, jakąś relację, w kolejnych odsłonach dokonuje korekty, a jego sformułowania stają się jaśniejsze i precyzyjniejsze. To wskazuje, że proces definiowania nie jest tylko nadawaniem znaczeń terminom matematycznym, lecz ściśle wiąże się z kolejnymi pogłębionymi analizami danego pojęcia⁵⁰.

Dedukowanie i redukowanie

Dedukcja, która w matematyce odgrywa zasadniczą rolę zarówno w działalności badawczej, jak i na etapie weryfikacji wyników badań, jest dla uczniów na pierwszym etapie edukacyjnym dostępna w bardzo ograniczonym zakresie. Konstruowanie lekcji jako wyvodu dedukcyjnego z usankcjonowanych na gruncie matematyki teorii prof. Krygowska uznała w związku z tym za niewłaściwe. Uzasadniała swoje stanowisko niedojrzałością uczniów do pełnego rozumienia charakteru metody dedukcji i jej roli w matematyce i proponowała w to miejsce zadania, które będą wspierały rozwój rozumowania dedukcyjnego uczniów. Jednak i tu, jak pisała, nie należy odwoływać się do ścisłej dedukcji z obowiązującym w niej rygiem formalności. Na tym etapie potrzebna jest bardziej luźna i dostosowana do poziomu nauczania dedukcja, która stopniowo będzie oswajała uczniów z aktywnością dedukowania od samego początku⁵¹.

49 Tamże, s. 94–97.

50 Tamże, *Elementy aktywności matematycznej*.

51 Tamże.

Jednak nie ma działalności matematycznej bez prowadzenia rozumowań, których zasadniczą rolą jest prawidłowe wyprowadzanie wniosków z dokonanych analiz. Ta charakterystyczna dla uczenia się matematyki działalność powinna być inicjowana w edukacji wczesnoszkolnej. Prowadzone przez uczniów rozumowania o znamionach dedukcji odnajdziemy np. podczas rozwiązywania zadań tekstowych. Jednak nie będą one polegały na wyprowadzaniu prawomocnych wniosków z założeń uznanych za prawdziwe. Najczęściej w praktyce szkolnej spotkamy się z wnioskami formułowanymi na podstawie obserwacji uczniów oraz przeprowadzonych przez nich doświadczeń. Tak na pierwszym etapie edukacyjnym można konstruować pierwsze hipotezy, które powstaną w wyniku dziecięcego wnioskowania, prowadzącego uczniów od tego, co wiedzą, do nowych dla nich faktów lub informacji. Kolejnym rodzajem rozumowania, równie ważnym, jest redukcja⁵². Tu prawdziwość wniosku, od którego rozpoczynamy rozumowanie, może prowadzić do fałszywej racji. Rozumowanie redukcyjne nazywamy wnioskowaniem uprawdopodobniającym i korzystając z niego, musimy być przekonani, że raczej inne niż wybrane są mało prawdopodobne. Szczególnym przypadkiem rozumowania redukcyjnego jest rozumowanie indukcyjne⁵³. W rozumowaniu indukcyjnym początkiem jest obserwacja pewnych faktów, na podstawie której wysnuwamy ogólniejszy do obserwowanych faktów wniosek. Tak jak w rozumowaniu redukcyjnym, tu również nie możemy mówić o bezwzględnej prawdziwości wnioskowania, bo opieramy się na własnym doświadczeniu i spostrzeżeniach.

Profesor Krygowska wyróżniła trzy typy rozumowań, których zastosowania doszukiwała się w nauczaniu matematyki. Były to: wnioskowanie empiryczne, rozumowanie intuicyjne i rozumowanie formalne⁵⁴. W rozumowaniu formalnym opieramy się na pełnej świadomości przyjętej podstawy dedukcji, a każdy wniosek jest wyprowadzany precyzyjnie na podstawie wcześniej poznanych twierdzeń i definicji. W rozumowaniu formalnym dedukcja jest wspierana przez redukcję⁵⁵. Ten typ rozumowania jest niezwykle zaawanso-

52 J. M. Bocheński, *Współczesne metody myślenia*, Poznań, 1992, s. 78.

53 Tamże.

54 Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, część 1, s. 137.

55 Taż, *Elementy aktywności matematycznej*.

wany i w edukacji wczesnoszkolnej mamy z nim niezwykle rzadko do czynienia. Właściwymi, jak wskazała Krygowska, rozumowaniami na pierwszym etapie edukacyjnym będą: wnioskowanie empiryczne i rozumowanie intuicyjne. Wnioskowania empirycznego dokonujemy na podstawie przeprowadzonych w świecie materialnym doświadczeń. Zaobserwowane fakty wsparte rozumowaniem indukcyjnym umożliwiają nam formułowanie spostrzeżeń w formie hipotez matematycznych⁵⁶. Rozumowanie intuicyjne, wiążące się z obrazami pojęć często nieopartych formalnymi definicjami, wykorzystuje się do wnioskowania o badanej sytuacji⁵⁷. Każde z tych rozumowań łączy się z koniecznością uwzględniania w nauczaniu matematyki psychologicznego procesu interioryzacji, tak istotnego na początku edukacji szkolnej.

Kodowanie, konstruowanie i racjonalne stosowanie języka symbolicznego

Język matematyki jest bardzo bogaty i ukształtowany nie tylko przez słowa. Odnajdziemy w nim obrazy, symbole, abstrakcyjne pojęcia czy właściwe dla logiki matematycznej konstrukcje zdaniowe. Wszystko to tworzy ogromną przestrzeń dla dziecięcej aktywności, przestrzeń, w której prawidłowo organizowane kształcenie wspiera rozwój kompetencji językowych w zakresie matematyki. Nie trzeba zatem podkreślać, że różnorodność, mnogość doświadczeń to warunek *sine qua non* bogactwa językowego dziecka.

Doświadczenie matematyki w edukacji dziecka organizujemy na wiele sposobów. Możemy odwołać się chociażby do zabawy, w której właściwie dobrane środki dydaktyczne pozwolą dziecku na drodze interioryzacji definiować pojęcia, uogólniać, formułować pierwsze wnioski czy dostrzeżone zależności po to, by następnie je weryfikować oraz poszukiwać dla nich właściwych zastosowań. To wszystko przyczynia się do tego, że potoczny język dziecka transformuje w formalny język matematyki. Organizowanie sytuacji inspirujących dziecko do działania powinno również uwzględniać rozwój kompetencji językowych.

56 Taż, *Zarys dydaktyki matematyki*, część 1, s. 137.

57 Tamże, s. 144.

Krygowska wskazywała na znaczenie symboliki, którą nasycony jest języki matematyki. Uważała, że zarówno aktywność kodowania, konstruowania symboli oraz umiejętność posługiwania się nimi powinny być rozwijane w nauczaniu⁵⁸. Jednocześnie przestrzegała przed działaniami powodującymi utratę semantycznego znaczenia symboli matematycznych. Takie niebezpieczeństwo dostrzegała w sytuacjach, gdy symbol poprzedza pojęcie. Według niej symbol powinien być wprowadzony równocześnie z pojęciem, do którego należy, lub po jego wprowadzeniu. Nie możemy również dopuszczać do sytuacji, w których symbol zastępuje pojęcie, np. gdy pojęcie obwodu prostokąta jest wprowadzone jako formuła $(2a + 2b)$. Prof. Krygowska podkreślała operatywny charakter języka matematyki, a jego poprawne kształtowanie równoważyła z kształceniem poprawnego rozumowania. Częściową i stopniową formalizację języka uważała za wprowadzanie ucznia w metodę matematyczną, czyli w realizację najistotniejszego wśród celów nauczania tego przedmiotu⁵⁹.

Algorytmizowanie, posługiwanie się racjonalne algorytmami

Algorytmem w kontekście nauczania matematyki będziemy za prof. Krygowską nazywali skończony ciąg czynności podstawowych, których rzetelne wykonanie gwarantuje uzyskanie poprawnego rozwiązania⁶⁰. Algorytmizację rozumiemy więc jako proces konstruowania algorytmu, który wymaga od ucznia wielu czynności myślowych. Według uczonej operatywny charakter matematyki i otwartość umysłu dziecka na operacjonalizację tej dziedziny wiedzy sprzyjają wykorzystywaniu algorytmów w nauczaniu od najmłodszych lat. Zachęcała przy tym do takiego organizowania procesu nauczania, by uczeń sam konstruował algorytmy jako plany rozwiązań pewnych zadań, a także racjonalnie posługiwał się gotowymi algorytmami⁶¹.

Wykorzystanie algorytmów w nauczaniu matematyki jest sprawą bezsporną. Pojawiają się one wszędzie tam, gdzie uczniowie korzystają z wcześniej wypracowa-

58 Tamż, *Elementy aktywności matematycznej*.

59 Tamż, *Zarys dydaktyki matematyki*, część 2, s. 104.

60 Tamż, *Zarys dydaktyki matematyki*, część 1, s. 114–115.

61 Tamż, *Elementy aktywności matematycznej*.

wanych sposobów rozwiązywania danego typu zadań. Ułatwiają i przyspieszają uczniom pracę. Mogą jednak nieść ze sobą pewne zagrożenie – mogą sprawić, że matematyka będzie odbierana jako dziedzina składająca się z zestawu procedur do pamięciowego opanowania. Z tego powodu prof. Krygowska za pożądane w nauczaniu uważała wprowadzenie uczniów w racjonalne stosowanie algorytmów z uwzględnieniem pojęciowego ujmowania danego zagadnienia⁶². Oczywiście nie negowała ona korzystania z gotowych algorytmów. Doceniała ich rolę jako narzędzia pewnej automatyzacji w zakresie chociażby sprawności rachunkowej, które umożliwia nauczycielowi wygospodarowanie czasu na działalność twórczą ucznia. Przestrzegała jednak przed ograniczaniem się tylko do algorytmów, gdyż jest to wielkie uproszczenie w nauczaniu, przyczyniające się do bezmyślnego odtwarzania wyćwiczonych kroków postępowania⁶³.

Inne czynności myślowe są uruchamiane podczas samodzielnego konstruowania algorytmów. Jest to umiejętność znacznie trudniejsza od poprzedniej. Rozpoczynamy ją od precyzyjnego formułowania planu rozwiązania, który jest odpowiednikiem kroków prowadzących do uzyskania rezultatu. Ten ważny etap w poszukiwaniu finalnego kształtu algorytmu związany jest z przeorganizowaniem dotychczas zdobytej wiedzy i wyodrębnieniem z niej elementów istotnych dla danego rozwiązania. Czynności te wymagają precyzyjnego i logicznego myślenia, a umiejętności te na początku kształcenia matematycznego dopiero się rozwijają. Pierwsze konstrukcje algorytmów oparte są zatem początkowo na rozumowaniu intuicyjnym i przy odpowiedniej ilości prób prowadzą ucznia do stworzenia czynnościowego planu algorytmu. Dopiero na kolejnych etapach kształcenia, w powiązaniu z uzmiennianiem danych, analizowaniem możliwych strategii rozwiązania i z wykorzystaniem rozumowania formalnego, uzyskujemy algorytm, któremu prof. Krygowska przypisała jednoznaczność, ogólność i efektywność. Wszystkie te działania prowadzą ucznia do formalizacji wybranych w procesie konstruowania algorytmów zagadnień matematycznych, których istotnym etapem są uczniowskie konstrukcje algorytmów na pierwszym etapie edukacyjnym⁶⁴.

62 Taż, *Zarys dydaktyki matematyki*, część 1, s. 114–115.

63 Taż, *Elementy aktywności matematycznej*.

64 Taż, *Zarys dydaktyki matematyki*, część 1, s. 114–115.

W nauczaniu w ujęciu algorytmicznym błędem jest ograniczanie się tylko do korzystania z algorytmów albo do koncentrowania wysiłków uczniowskich na konstrukcji algorytmów. Prof. Krygowska wyraźnie wskazała, że w nauczaniu matematyki jest miejsce i dla jednych, i drugich. Zachęcała nauczycieli, aby prowokować sytuacje, w których uczniowie będą porównywali algorytmy, poszukiwali ich prostszej postaci, tworzyli algorytmy analogiczne do podanego, oceniali poprawność algorytmu oraz zapisywali je w różnych formach (drzewka, organigramy itp.)⁶⁵.

* * *

Uogólniając nasze rozważania dotyczące aktywności matematycznych, możemy z całą pewnością stwierdzić, że należy je inicjować już na etapie edukacji wczesnoszkolnej. Wymusza to taką organizację szkolnego procesu kształcenia matematycznego dziecka, w której oprócz nabywania wiadomości i kształcenia poszczególnych umiejętności klasa szkolna staje się przestrzenią doświadczania specyficznych dla matematycznych aktywności postaw i technik intelektualnych. To one – zdaniem prof. Krygowskiej – odpowiadają za rozwój ogólniejszych technik i postaw każdego z nas oraz umożliwiają transfer wiedzy matematycznej na inne dziedziny⁶⁶. Kształtują nasze poglądy na rolę nauki i teoretycznego myślenia w świecie ciągłych zmian ekonomicznych, cywilizacyjnych i kulturowych.

Nauczanie matematyki ma umożliwiać uczniom pełne zaangażowanie się w proces poznawczy. Nie może być kojarzone z uczniowskim odtwarzaniem wypracowanych z mozołem procedur działania. To wyzwianie aktywności matematycznych uczniów uwalnia lekcję od „matematyki dorosłych”. Daje szansę na tworzenie swojej matematyki, na samodzielne kształtowanie pojęć, dostrzeganie i opisywanie zależności między obiektami matematycznymi czy znajdowanie własnej drogi do matematyki. Głównym przesłaniem prof. Krygowskiej było uświadomienie wszystkim, którzy uczą matematyki, że działanie w świecie abstrakcji składa się z systemu podstawowych, specyficznych

65 Tamże, s. 116–118.

66 Tamże.

operacji myślowych. To właśnie one są podstawą świadomego i planowego nauczania, a prowokowane aktywności matematyczne powinny służyć głębszemu i pełniejszemu postrzeganiu matematyki.

Streszczenie: Wybitna polska dydaktyk matematyki profesor Anna Zofia Krygowska całe swoje życie poświęciła poszukiwaniu rozwiązań ułatwiających pokonywanie trudności w uczeniu się matematyki. W jej działalności naukowej odnajdziemy wiele propozycji dydaktycznych, które do dziś możemy z powodzeniem stosować w praktyce szkolnej. W niniejszym artykule skoncentrowano się na jednej z tych propozycji, czyli wyzwalaniu aktywności matematycznej uczniów. Specyficzne dla działalności matematycznej aktywności, tj. definiowanie, matematyzowanie i schematyzowanie, dedukowanie i redukcjonowanie, algorytmizowanie czy dostrzeganie i wykorzystywanie analogii z powodzeniem możemy inicjować w edukacji matematycznej na pierwszym etapie edukacyjnym.

Słowa kluczowe: aktywność matematyczna, nauczanie matematyki, edukacja wczesnoszkolna, Anna Zofia Krygowska.

Bibliografia

Źródła

- Krygowska Z., *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*, „Dydaktyka Matematyki”, 6 (1986) s. 25–41.
- Krygowska Z., *Główne problemy i kierunki badań współczesnej dydaktyki matematyki*, „Dydaktyka Matematyki”, 1 (1982) s. 7–60.
- Krygowska Z., *Koncepcje powszechnego matematycznego kształcenia*, Kraków 1981.
- Krygowska Z., *Międzynarodowa Konferencja w Sprawach Nauczania Matematyki w Krakowie*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego”, seria II: „Wiadomości Matematyczne”, 4 (1961) nr 3, s. 289–293.
- Krygowska Z., *Zarys dydaktyki matematyki, część 1*, Warszawa 1979.
- Krygowska Z., *Zarys dydaktyki matematyki, część 2*, Warszawa 1977.
- Krygowska Z., *Zarys dydaktyki matematyki, część 3*, Warszawa 1977.

Opracowania

- Bell A. W., *The Learning of Process Aspects of Mathematics*, „Educational Studies in Mathematics” 10 (1979) s. 361–387, <https://link.springer.com/article/10.1007/BFO0314662#citeas>, dostęp: 7.04.2023.

- Bocheński J. M., *Współczesne metody myślenia*, Poznań, 1992.
- Ciosek M., *O wpływie Anny Zofii Krygowskiej na dydaktykę matematyki w świecie*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego”, seria v: „Dydaktyka Matematyki”, 28 (2005) s. 129–154.
- Dąbrowski M., *Edukacyjna codzienność klasy trzeciej*, w: *Badanie umiejętności podstawowych uczniów klas trzecich klas szkoły podstawowej. Nauczyciel kształcenia zintegrowanego 2008 – wiele różnych światów?*, red. M. Dągiel, M. Żytko, Warszawa 2009, s. 125–175???
- Filip J., Rams T., *Dziecko w świecie matematyki*, Kraków 2000.
- Gruszczyk-Kolczyńska E., *O kryzysie edukacji matematycznej dzieci. Rozpaczliwe wołanie o działania naprawcze*, „Matematyczna Edukacja Dzieci”, 1 (2016) s. 5–40.
- Kalinowska A., *Wyniki badań trzecioklasistów jako diagnoza kontekstów nauczania matematyki w klasach najmłodszych*, „Ruch Pedagogiczny”, 2 (2014) s. 147–156.
- Klus Stańska D., Nowicka M., *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej*, Warszawa 2013.
- Konior J., *Wnioskowanie przez analogię i potrzeba jego rozwijania w edukacji matematycznej*, „Nauczyciel i Szkoła”, 1–2 (2004) s. 67–77.
- Polya G., *Jak to rozwiązać?*, tłum. L. Kubik, Warszawa 1964.
- Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14 lutego 2017 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej (Dz.U. z 2017 r., poz. 356).
- Siwek H., *Anna Zofia Krygowska – w stulecie urodzin*, „Matematyka”, 6 (2004) s. 4–11.
- Siwek H., *Profesor Krygowska – niezwykły człowiek, tytan pracy*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego”, seria v: „Dydaktyka Matematyki”, 28 (2005) s. 83–98.
- Treliński G., *Integracja nauczania – uwarunkowania, praktyka*, w: *Matematyczna edukacja wczesnoszkolna. Teoria i praktyka Z. Semadeni*, red. E. Gruszczyk-Kolczyńska, G. Treliński, B. Bugajska-Jaszczot, M. Czajkowska, Kielce 2015, s. 197–223???
- Treliński G., *Matematyzowanie jako składowa kompetencji matematycznej*, „Matematyczna Edukacja Dzieci”, 1 (2016) s. 65–82.