

Lidia Pawlusińska*

„Listy z podróży” Anny Zofii Krygowskiej źródłem refleksji nad kształtem edukacji matematycznej

„Letters from Travels” by Anna Zofia Krygowska as a Source of Afterthought on the Shape of Mathematics Education

Abstract: The debate about good mathematical preparation of students at every stage of education remains lively and extremely relevant worldwide. The search for systemic and didactic solutions continues to generate considerable interest among those involved in developing the mathematical competences of future generations. This article reflects on the views of Professor Anna Zofia Krygowska, based on her deep knowledge of mathematics, experience in teaching children and young people, and international contacts, which, in her opinion, enabled her to engage in substantive and informed discussions that challenged her own beliefs.

The text discusses three main areas of her international activity: the role of the teacher and their preparation for teaching, the conscious and active shaping of the mathematical learning process, and the concept of a „mathematical culture for all.

Keywords: mathematical culture, teacher’s role, conscious and active learning of mathematics.

* Lidia Pawlusińska (ORCID: 0000-0003-0311-9755) – dr, Uniwersytet Szczeciński, Wydział Nauk Społecznych; kontakt: lidia.pawlusinska@usz.edu.pl.

Wprowadzenie

Jedną z najwybitniejszych postaci w historii polskiej dydaktyki matematyki jest Anna Zofia Krygowska (1904–1988). Jej działalność naukowa, pedagogiczna i organizacyjna wywarła znaczący wpływ na kształtowanie się nowoczesnych koncepcji nauczania matematyki w Polsce, a także poza jej granicami. Działała w okresie intensywnych przemian społecznych, politycznych i edukacyjnych, które zaważyły na kształtowaniu się dydaktyki matematyki jako odrębnej dyscypliny naukowej. Jej aktywność zawodowa przypadała na czas międzywojnia, okres II wojny światowej oraz dekady powojenne, w których edukacja w Polsce przechodziła przez kolejne etapy reorganizacji systemu szkolnego, ideologizacji nauczania oraz modernizacji uwzględniającej rozwój nauki i technologii¹.

W latach trzydziestych XX w. edukacja matematyczna w Polsce, zresztą tak jak i na całym świecie, była silnie zakorzeniona w tradycji akademickiej, z naciśkiem na formalizm i abstrakcję. Krygowska jako nauczycielka i badaczka dostrzegała potrzebę zmiany podejścia do nauczania matematyki. Postulowała m.in. odejście od mechanicznego rozwiązywania zadań na rzecz rozwijania myślenia matematycznego, intuicji i rozumienia pojęć. Jej poglądy były zgodne z ówczesnymi międzynarodowymi tendencjami, m.in. z ideami Jeana Piageta², które zaczęły przenikać do nauczania matematyki³. Po II wojnie świa-

- 1 M. Ciosek, *O wpływie Anny Zofii Krygowskiej na dydaktykę matematyki na świecie*, „Dydaktyka Matematyki”, 28 (2005) s. 129–154.
- 2 Zofia Krygowska w swojej działalności dydaktycznej szeroko wykorzystywała koncepcje rozwoju poznawczego dziecka sformułowane przez Jeana Piageta. Odwołując się do teorii stadialności, integrowała wiedzę psychologiczną z analizą struktury matematyki, adaptując ją do warunków edukacji szkolnej (Krygowska, 1977b). Opracowana przez nią metoda czynnościowego nauczania opiera się na zasadzie stopniowego przechodzenia od czynności konkretnych, poprzez czynności wyobrażeniowe, aż do operacji abstrakcyjnych, co pozostaje w zgodzie z piagetowską koncepcją rozwoju operacji logicznych (Inhelder, Piaget, 1970). Bezpośrednią aplikację idei aktywności poznawczej Piageta można dostrzec w postulatach Krygowskiej dotyczących organizacji procesu lekcyjnego, w którym uczeń konstruuje wiedzę poprzez rozwiązywanie sytuacji problemowych (Z. Krygowska, *Metodyka nauczania matematyki*, Kraków 1980).
- 3 H. Siwek, *Profesor Krygowska – niezwykły człowiek, tytan pracy*, „Dydaktyka Matematyki”, 28 (2005) s. 84–98.

towej, w okresie odbudowy systemu edukacji, Krygowska aktywnie uczestniczyła w tworzeniu nowoczesnych programów nauczania oraz w kształceniu nauczycieli, a zagraniczne podróże pozwoliły jej na porównanie różnych modeli edukacyjnych i sformułowanie aktualnych do dziś wniosków.

Jej aktywność na arenie międzynarodowej można podzielić na trzy wzajemnie powiązane obszary. Pierwszy obejmował uczestnictwo w konferencjach oraz współorganizację konferencji międzynarodowych, które stanowiły platformę wymiany doświadczeń i poglądów w zakresie nauczania matematyki. Drugi dotyczył jej współpracy w ramach prowadzenia wykładów, szkoleń i wizyt studyjnych, których przebieg i rezultaty z dużą starannością relacjonowała na łamach czasopism Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Trzeci obszar związany był z jej działalnością, obejmującą zarówno autorskie teksty publikowane w zagranicznych periodykach, jak i tłumaczenia artykułów obcojęzycznych oraz ich udostępnianie polskim czytelnikom. Wszystkie wymienione formy aktywności naukowych łączył wspólny cel, czyli rozwój dydaktyki matematyki poprzez integrację międzynarodowych doświadczeń z krajową praktyką edukacyjną.

W wywiadzie radiowym prof. Krygowska tak mówiła o sobie:

W 1956 roku wyjechałam w delegacji do Genewy na Konferencję Międzynarodowego Biura Wychowania UNESCO i tam już zadzierzgnęłam takie węzły prawie przyjaźni z rozmaitymi ludźmi na Zachodzie. Tak że potem już miałam bardzo wiele kontaktów na Wschodzie i na Zachodzie i znowu takie szczęście, że miałam grupę ludzi, którzy jakoś mieli podobne pasje⁴.

Jak sama wielokrotnie podkreślała, był to początek jej międzynarodowej współpracy z przedstawicielami środowiska naukowego. Dzieląc pasję do matematyki, a przede wszystkim poszukując odpowiedzi na pytania dotyczące jej nauczania, Krygowska stała się mostem między tym, co obserwowała za granicą, a tym, co znane było z polskiego kontekstu edukacyjnego.

4 *Profesor Zofia Krygowska o sobie (marzec 1985 r.)* – tekst opracowany na podstawie wywiadu nagranych dla Rozgłośni Polskiego Radia w Krakowie w marcu 1985 r., „Dydaktyka Matematyki”, 12 (1990) s. 28–29.

Wartościowym źródłem refleksji nad edukacją matematyczną są artykuły i sprawozdania Krygowskiej, pisane po jej zagranicznych wyjazdach naukowych. „Listy z podróży” – bo tak określam te teksty – stanowią cenne świadectwo jej obserwacji praktyk dydaktycznych, organizacji nauczania oraz kulturowych uwarunkowań edukacji w różnych krajach. Nie są to jedynie zapisy doświadczeń, lecz także głęboka, krytyczna refleksja nad tym, co może być inspirujące i wartościowe dla polskiej szkoły.

Celem niniejszego artykułu jest analiza wybranych tekstów Krygowskiej, porównanie zawartych w nich przemyśleń z aktualnymi wyzwaniami w nauczaniu matematyki oraz próba odpowiedzi na następujące pytania: jakie problemy i rozwiązania dotyczące nauczania matematyki dostrzegała Krygowska w różnych systemach edukacyjnych? W jakim stopniu jej obserwacje pozostają aktualne w kontekście współczesnych wyzwań dydaktycznych?

Metodologia badania

Do „Listów z podróży”, których analiza stanowi temat artykułu, zaliczono wybrane teksty Anny Zofii Krygowskiej opublikowane na łamach czasopism „Matematyka”, „Wiadomości Matematyczne” i „Didactica Mathematica” wydawanych przez Polskie Towarzystwo Matematyczne oraz sprawozdania dotyczące jej międzynarodowych aktywności naukowych, które składała jako kierownik Katedry Geometrii, a później kierownik Katedry Dydaktyki Matematyki na Wydziale Matematyczno-Fizycznym Państwowej Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Krakowie⁵. Szczegółowa lista analizowanych tekstów znajduje się w wyróżnionej części bibliografii. Badanie ma charakter jakościowy i łączy elementy analizy źródeł historycznych z refleksją pedagogiczną.

Zidentyfikowano trzy główne obszary tematyczne występujące w tekstach Krygowskiej takie jak: rola nauczyciela oraz jego przygotowanie do pracy dydaktycznej, proces uczenia się matematyki jako świadoma i aktywna działalność ucznia oraz edukacja matematyczna jako integralny element szeroko postrzeganej kultury. Dokonano ponadto zestawienia wybranych refleksji Krygowskiej z aktualnymi trendami w edukacji matematycznej, opierając się

5 Materiały archiwalne UKEN w Krakowie.

na współczesnej literaturze naukowej oraz dokumentach programowych (podstawa programowa kształcenia ogólnego, raporty z badań PISA i TIMSS). Na podstawie tak przeprowadzonej analizy tekstów zostały sformułowane wnioski dotyczące aktualności i potencjału inspiracyjnego myśli Krygowskiej dla współczesnych nauczycieli i badaczy edukacji matematycznej. Należy dodać, że badanie ma charakter eksploracyjny i nie rości sobie prawa do pełnej rekonstrukcji poglądów profesor Krygowskiej, lecz stanowi próbę ukazania ich znaczenia w kontekście współczesnych wyzwań edukacyjnych.

W poszukiwaniu kształtu edukacji matematycznej – analiza „Listów z podróży” Krygowskiej

Ogromne doświadczenie w nauczaniu dzieci i młodzieży oraz gruntowna znajomość matematyki sprawiły, że działalność naukowa Krygowskiej już od samego początku była ukierunkowana na wprowadzanie zmian w zakresie nauczania matematyki. Już w 1952 r., w planie pracy Katedry Geometrii, apelowała o namysł i roz wagę nad jakością kształcenia matematycznego, pisząc:

W matematycznej literaturze w języku polskim brak jest łatwo dostępnych prac oświatlających zagadnienia matematyki elementarnej z punktu widzenia współczesnej nauki. Nieliczne takie opracowania (najczęściej tłumaczenia) są przestarzałe i nie uwzględniają nowoczesnych metod matematycznych. [...] Do zadań katedr matematycznych Państwowej Wyższej Szkoły Pedagogicznej powinno należeć także pogłębienie zrozumienia filozoficznych podstaw matematyki i kierunku rozwojowego matematyki współczesnej oraz zbieranie materiałów i doświadczeń dla wypracowania metodyki nauczania w szkołach wyższych typu pedagogicznego⁶.

Słowa Krygowskiej przekonują, że nie tylko dostrzegała ona potrzebę gruntownych zmian w nauczaniu matematyki na każdym etapie kształcenia, ale także wskazywała na konieczność uwzględnienia w tych zmianach systemowego podejścia. Warto zauważyć, że uczona nie doszukiwała się rozwiązania

6 Plan pracy Katedry Geometrii Państwowej Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Krakowie 1952/1953 (Kraków, 14 listopada 1952). Materiały archiwalne UKEN w Krakowie.

problemów tylko w ogólnych regulacjach. Jej zdaniem jednym z kluczowych elementów właściwej modernizacji nauczania powinna być ocena wprowadzonych zmian, dokonana na podstawie rzetelnie przeprowadzonych badań⁷.

Podejście takie świadczy o głębokim zrozumieniu złożoności procesu edukacyjnego – zakłada bowiem, że skuteczność reform nie może być oceniana wyłącznie przez pryzmat założeń teoretycznych czy administracyjnych decyzji, lecz musi opierać się na empirycznych danych, analizie praktyki szkolnej oraz refleksji nad rzeczywistymi efektami dydaktycznymi. Krygowska postulowała więc nie tylko zmianę treści i metod nauczania, ale również rozwój kultury ewaluacyjnej, w której badania pełnią rolę narzędzia wspierającego świadome i odpowiedzialne zmiany w zakresie edukacji matematycznej.

Rola nauczyciela i jego przygotowanie do pracy dydaktycznej

Niezwykle istotnym elementem każdej zorganizowanej edukacji jest osoba nauczyciela. Dyskusje dotyczące rozumienia profesjonalizacji w tym zawodzie ukazują potrzebę ciągłego redefiniowania jego roli, kompetencji oraz standardów etycznych⁸. Nie budzi żadnej wątpliwości to, że w obliczu dynamicznych zmian społecznych, technologicznych i edukacyjnych niezmiennie aktualna pozostaje potrzeba refleksji nad rolą nauczyciela, szczególnie w kontekście pracy z najmłodszymi uczniami.

Dla Krygowskiej jednym z kluczowych elementów właściwie zorganizowanego nauczania matematyki był nauczyciel oraz jego przygotowanie do zawodu. Podkreślała, że głębokie rozumienie treści matematycznych, umiejętność ich operacyjnego przekształcania, świadomość psychologiczna i pedagogiczna, a także refleksyjność w działaniu, stanowią niezbędne cechy profesjonalnego nauczyciela⁹. Takie podejście wskazuje na konieczność kształcenia nauczycieli nie tylko jako przekazicieli wiedzy, lecz i świadomych uczestników procesu edu-

7 Z. Krygowska, *Główne problemy i kierunki badań współczesnej dydaktyki matematyki*, „Dydaktyka Matematyki”, 1 (1982) s. 7–60.

8 E. Kochanowska, *Wymiary profesjonalizmu nauczyciela wczesnej edukacji z perspektywy kandydatów do zawodu*, „Forum Pedagogiczne” 10 (2020) 1, s. 95–110.

9 Z. Krygowska, *Problemy nowoczesnego kształcenia nauczycieli matematyki*, „Wiadomości Matematyczne”, 14 (1972) s. 111–117.

kacyjnego, zdolnych do krytycznej analizy własnej praktyki i dostosowywania jej do zmieniających się potrzeb uczniów oraz wyzwań współczesnej szkoły.

Krygowska, podczas swojego wystąpienia na ogólnopolskiej konferencji w Krakowie w 1964 r., przekonywała słuchaczy o konieczności modyfikacji kształcenia matematycznego zarówno na poziomie szkoły podstawowej, jak i w grupie przyszłych nauczycieli tego przedmiotu. Według niej to właśnie zmiana sposobu przygotowania do zawodu nauczyciela matematyki stanowiła klucz do skutecznej modernizacji nauczania matematyki w szkołach. Temat ten był wielokrotnie podejmowany na międzynarodowych konferencjach naukowych¹⁰, a dyskusje prowadzone w gronie międzynarodowym szczególnie wyrażnie wybrzmiały właśnie podczas konferencji w Krakowie. Krygowska przekonywała słuchaczy, że:

Problemy kształcenia nauczycieli matematyki nie redukują się więc do problemów kształcenia elity takich nauczycieli dla elity matematycznej uczniów. Przeciwnie, zadaniem trudnym, ale koniecznym i pilnym jest nowoczesne kształcenie masy nauczycieli dla masy uczniów, ponieważ nie elita nauczycieli i nie elita uczniów podniesie kulturę matematyczną społeczeństwa¹¹.

W wystąpieniu Krygowskiej metodyka nauczania matematyki¹² pojawiła się jako autonomiczna dyscyplina naukowa z coraz wyraźniej precyzującymi się metodami badania. Jej interdyscyplinarny charakter objął swym zakresem nie tylko matematykę i dydaktykę ogólną, ale również psychologię, socjologię, a nawet filozofię. Krygowska podkreślała, że dostrzeganie w niej tylko wymiaru praktycznego, koncentrującego się na przygotowywaniu do zawodu nauczyciela, jest błędne i szkodliwe dla nauczania. Przekonywała, że metodykę nauczania matematyki należy traktować jako jeden z ważnych przedmiotów studiów przyszłych nauczycieli matematyki na różnych poziomach nauczania, a jej kurs wskazane, by opierał się na programie otwartym, obejmującym

10 Tamże, s. 112.

11 Tamże.

12 Późniejsza „Dydaktyka Matematyki”.

podstawy ogólne oraz te bezpośrednio związane z realizacją materiału szkolnego. Zdaniem Krygowskiej konstrukcja takiego otwartego, a nie ogólnego programu powinna obejmować – oprócz wykładów i ćwiczeń – problematykę studium z dodatkowym wyszczególnieniem zajęć praktycznych oraz samodzielne studiowanie lektury przez studentów. W programie winny więc znaleźć się pewne elementy stałe i takie, które należy modyfikować zależnie od kolejnych osiągnięć dydaktyki matematyki oraz aktualnych potrzeb oświatowych. Otwartość takiego programu musi polegać również na wyborze różnych sposobów realizacji, gdyż pewne zagadnienia ogólne mogą uwidaczniać się na tle zagadnień szczegółowych i odwrotnie. Zdaniem Krygowskiej taki program nie musi być zbyt ramowy, a jego elastyczność wskazane, żeby umożliwiała szybkie, odpowiadające aktualnym potrzebom zmiany¹³. Wygłoszone przez uczoną tezy UNESCO przetłumaczyło na kilka języków, co świadczy o ich trafności i znaczeniu dla dostrzegalnej potrzeby modyfikowania nauczania matematyki na świecie¹⁴.

Ważnym – w mojej ocenie – głosem Krygowskiej była potrzeba zainteresowania przyszłych nauczycieli tym, co dzieje się w edukacji matematycznej w innych krajach. Uważała, że taka wiedza nie tylko poszerza horyzonty, ale również umożliwia krytyczne porównanie różnych koncepcji nauczania matematyki oraz profesjonalne budowanie własnego warsztatu pracy, odpornego na „niebezpieczeństwa rutyny”¹⁵. Pogląd ten pozostaje aktualny, zwłaszcza w kontekście znaczących różnic w osiągnięciach uczniów w różnych systemach

13 Z. Krygowska, *Problemy nowoczesnego kształcenia nauczycieli matematyki*, s. 111–117.

14 Tekst wystąpienia został opublikowany w kilku językach (po polsku: *Dydaktyka matematyki jako przedmiot studiów wyższych*, „Prace z Dydaktyki Szkoły Wyższej, Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Krakowie” 1965; po angielsku i francusku: *Methodologie de l'enseignement des mathematiques, sujet d'etude au niveau superieur*, *New Trends in Mathematics Teaching*, Paris 1966, s. 202–218; *Colloque Mathematique dans les Pays Europeens*, Bucarest 1968, s. 435–448; po niemiecku: *Mathematikdidaktische Forschung an der pädagogischen Hochschule Krakau*, Beiträge zum Mathematikunterricht, Hannover 1972, s. 117–125; *Methodologie des Mathematikunterrichts als Studienobjekt an der Hochschule*, Didaktik der Mathematik, Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1978, s. 117–125; po rumuńsku: *Textul matematic in vafamint*, „*Caleta de Pedagogie Moderna*” – 1971 nr 3, s. 186–200) i zaprezentowany na międzynarodowej konferencji w Bayreuth (Niemcy 1971)).

15 Z. Krygowska, *Problemy nowoczesnego kształcenia nauczycieli matematyki*, s. 116.

edukacyjnych, co potwierdzają takie międzynarodowe badania porównawcze jak PISA¹⁶ czy TIMSS¹⁷.

Otwartość na doświadczenia innych krajów sprzyja refleksji nad skutecznością stosowanych metod, a także inspiruje do wdrażania innowacyjnych rozwiązań dostosowanych do lokalnych potrzeb. Krygowska dostrzegała wartość w interdyscyplinarnym i międzynarodowym dialogu pedagogicznym, który może prowadzić do podnoszenia jakości kształcenia matematycznego. Współczesny nauczyciel, podobnie jak w czasach Krygowskiej, powinien być nie tylko praktykiem, ale również badaczem i obserwatorem globalnych trendów edukacyjnych.

Krygowska podkreślała znaczenie profesjonalizacji zawodu nauczyciela matematyki, wskazując, że skuteczne nauczanie wymaga nie tylko solidnej wiedzy matematycznej, ale również rozwiniętych kompetencji psychologicznych i pedagogicznych. Zwraçała uwagę na konieczność integrowania tych obszarów, aby nauczyciel mógł lepiej rozumieć potrzeby uczniów, wspierać ich rozwój poznawczy i emocjonalny oraz dostosowywać metody pracy do różnych stylów uczenia się¹⁸.

Współczesne badania potwierdzają aktualność tej refleksji, akcentując potrzebę rozwijania kompetencji metodycznych, psychologicznych i komunikacyjnych jako fundamentu nowoczesnego nauczania¹⁹. W dobie zmieniających się oczekiwań społecznych wobec edukacji nauczyciel staje się nie tylko ekspertem w swojej dziedzinie, ale również empatycznym przewodnikiem,

- 16 Organizowane co trzy lata przez Organizację współpracy Gospodarczej i Rozwoju międzynarodowe badania, które oceniają umiejętności piętnastoletnich uczniów w zakresie czytania, matematyki, nauk przyrodniczych.
- 17 Organizowane co cztery lata przez Międzynarodowe Stowarzyszenie Mierzenia Osiągnięć Szkolnych – IEA Międzynarodowe Badanie Wyników Nauczania Matematyki i Nauk Przyrodniczych.
- 18 Z. Krygowska, *Problemy nowoczesnego kształcenia nauczycieli matematyki*, s. 111–117.
- 19 M. Czajkowska, M. Grochowalska, M. Orzechowska, *Potrzeby nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej i nauczycieli matematyki w zakresie rozwoju zawodowego*, Warszawa 2015; J. Szempruch, *Problemy kształcenia i doskonalenie nauczycieli w Polsce – w kierunku profesjonalizacji zawodu*, 2 (2022) s. 27–47, DOI: 10.31268/StudiaBAS.2022.11.; Z. Zbróg, M. Kaleta-Witusiak, B. Walasek-Jarosz, *Kompetencje nauczyciela w zakresie sprawnego prowadzenia lekcji*, Kielce 2013, s. 21–64; K. Benek, *Nowe wyzwania dla polskiej nauki: kompetencje miękkie*, „Zeszyty Naukowe Akademii Górnośląskiej”, 13 (2024 s. 146–152, DOI: 10.53259/2024.01.16.

potrafiącym budować relacje, motywować uczniów i tworzyć środowisko sprzyjające uczeniu się. Postulaty Krygowskiej, tj. otwartość na współpracę interdyscyplinarną i międzynarodową, gotowość ciągłego doskonalenia i refleksji nad własną praktyką, zachowanie równowagi między wiedzą przedmiotową a kompetencjami miękkimi nadal pozostają aktualne.

Uczenie się matematyki jako proces świadomej i aktywnej działalności

Kolejnym istotnym obszarem naukowej aktywności prof. Krygowskiej był proces uczenia się matematyki. Twierdziła, że musi on być świadomą i aktywną działalnością jednostki. Jednak, aby taki był, powinien być prawidłowo przygotowany. Początkiem działań związanych z należycie przygotowanym środowiskiem uczenia się uczyniła więc elementaryzację. Elementaryzacja polega na wydobywaniu z danego zagadnienia matematycznego materiału naukowego na użytek nauczania w taki sposób, aby dostrzec idee w nim ukryte, związki z materialnym doświadczaniem, intuicje, genetyczne źródła tego, co uczyniliśmy przedmiotem nauczania bądź też te idee, które często w nauce kryją się pod formalną wersją prezentacji tematu²⁰. A wszystko powinno służyć jednemu celowi:

[...] wykryciu naturalnej drogi stopniowego schematyzowania, prowadzącej od doświadczeń ilościowych i przestrzennych oraz różnych form aktywności do abstrakcyjnych struktur matematycznych²¹.

Dopiero to miało stanowić podstawę wyboru metod, form i środków opracowania zagadnienia na właściwym poziomie elementarności. Uczona przekonywała jednocześnie, że poziom elementaryzacji jest uzależniony od poziomu nauczania i musi uwzględniać nie tylko prawa matematyki, ale również wiedzę z zakresu psychologii²².

20 Z. Krygowska, *Główne problemy i kierunki badań współczesnej dydaktyki matematyki*, s. 30–32.

21 Tamże, s. 30.

22 Tamże, s. 30.

Właściwy dobór rozwiązań dydaktycznych dla danego poziomu dojrzałości procesów myślowych uczona uzależniała od dwóch ważnych aspektów. Pierwszy to operatywny charakter matematyki, drugi – psychologiczny proces interioryzacji. Operatywny charakter matematyki obecny w każdym pojęciu, twierdzeniu czy dowodzie należy wydobyć, dokonując elementaryzacji uwzględniającej poziom poznawczy uczniów. Wyodrębniony w taki sposób ciąg podstawowych czynności myślowych należy przełożyć na planowane do rozwiązania przez uczniów zadania. Te zadania początkowo powinny odnosić się do czynności konkretnych wykonywanych na materiale rzeczywistym, następnie do czynności wyobrażonych wykonywanych w myśli, lecz nadal odwołujących się do wykonywanych uprzednio czynności konkretnych, by wreszcie uniezależnić się od nich i osiągnąć poziom myślenia abstrakcyjnymi operacjami²³. Dlatego też myślenie matematyczne Krygowska uzależniała od działania. Pisała:

Myślenie nie jest bierną kontemplacją danej nam a priori sytuacji: jest bardzo wyraźną aktywnością, wykonywaniem różnego typu czynności²⁴.

Znaczenie, jakie Krygowska przypisywała elementaryzacji, operatywnemu charakterowi matematyki i psychologicznemu procesowi interioryzacji, odnajdujemy w autorskiej koncepcji czynnościowego nauczania²⁵. Za jej podstawę Krygowska uznała konieczność świadomego organizowania takich sytuacji problemowych, które muszą sprzyjać procesowi interioryzacji i jednocześnie kształtować myślenie matematyczne ucznia oraz jego swobodne i świadome posługiwanie się przyswajanymi stopniowo operacjami matematycznymi²⁶.

Wśród zabiegów dydaktycznych zalecanych przez Krygowską w celu zapewnienia prawidłowości i efektywności nauczania czynnościowego należy wyróżnić przede wszystkim wiązanie planowanych do realizacji treści matematycznych z wyraźnie formułowanymi schematami postępowania. Jest to

23 Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, część 1, Warszawa 1979, s. 88–89.

24 Z. Krygowska, *Metodologiczne i psychologiczne podstawy czynnościowej metody nauczania matematyki*, w: F. Kiryk, *Wyższa Szkoła Pedagogiczna im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie w 40 roku działalności*, Kraków 1986, s. 449–465.

25 Tamże.

26 Tamże.

jej zdaniem niezwykle istotne, gdyż związku między dwiema czynnościami, kiedy wykonanie jednej czynności uzależnia się od wykonania drugiej, należy się nauczyć²⁷. Łączenie operacji z operacją odwrotną to kolejny istotny zabieg dydaktyczny. Uczona wyraźnie przestrzegала, że jednostronne kształtowanie danego zagadnienia prowadzi do kształtowania mechanicznych nawyków, nie operacji²⁸. Ponadto wiązanie operacji z różnych dziedzin matematyki w bardziej złożone schematy czy uwzględnianie różnych ciągów operacji prowadzących do tego samego wyniku (np. różnych sposobów rozwiązywania zadań) prowadzi uczniów do systematycznego budowania struktur matematycznych z uwzględnieniem różnych dróg osiągnięcia celu²⁹.

Podkreślała, że nauczyciel, konstruując zajęcia, powinien prowokować uczniów do poszukiwania rozwiązań w sytuacjach konfliktowych. To wtedy opanowane wcześniej schematy postępowania zawodzą, co wymusza ich modyfikacje albo poszukiwanie zupełnie nowych rozwiązań³⁰. Za niezwykle istotne, szczególnie na początku przygody z matematyką szkolną, uznała opisywanie przez uczniów słowami tego, co robią, jakie czynności wykonują w celu rozwiązania zadania. To właśnie opisywanie słowami wykonywanych czynności wspiera świadome przeprowadzanie operacji oraz nadaje „stabilność naszym procesom intelektualnym”³¹. Na koniec należy dodać, że swobodne, pozbawione biernej komplementacji, korzystanie z tekstu matematycznego uczona uważała za znaczącą umiejętność ułatwiającą uczenie się matematyki³². Twierdziła, że zdolność czytania tekstów matematycznych nie jest nam dana wraz ze znajomością alfabetu. Należy ją doskonalić od najmłodszych lat poprzez teksty dobrane do poziomu możliwości poznawczych i dotychczasowych osiągnięć dziecka³³.

27 Tamże.

28 Tamże.

29 Tamże.

30 Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, część 1, Warszawa 1979, s. 110–111.

31 Tamże, s. 92.

32 Z. Krygowska, *Języki matematyki w nauczaniu (XV Konferencja CIEAEM w Founex)*, „Matematyka. Czasopismo dla nauczycieli”, 15 (1962) nr 3(73), s. 161–169.

33 Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, część 2, Warszawa 1977, s. 15.

Analizując proces, jak prof. Krygowska postrzegała nabywanie kompetencji matematycznych przez uczniów, nie możemy pominąć jej stanowiska dotyczącego trudności i błędów ujawniających się w trakcie uczenia się matematyki. Polska dydaktyk uważała, że nieodzownym elementem każdej aktywności matematycznej jest możliwość pojawienia się błędu:

Błąd nie powinien być więc uważany za nieszczęście, za katastrofę ani dla tego, kto się uczy, ani dla tego, kto uczy. Dlaczego więc jest inaczej w warunkach szkolnych?³⁴.

Oczywiście nie równoważyła wszystkich błędów pojawiających się podczas uczenia się matematyki. Wyraźnie wskazywała, że niektóre z nich wynikają z chwilowych pomyłek spowodowanych brakiem uwagi ucznia, lukami w uczniowskiej wiedzy czy czasową niechęcią ucznia do rozwiązywania proponowanych podczas zajęć problemów matematycznych. Inne, jej zdaniem groźniejsze, wiążą się z głęboko zakorzenionymi fałszywymi koncepcjami czy też rozumowaniem logicznie niepoprawnym³⁵. Te pierwsze – przy zaangażowaniu i refleksji ucznia – mogą być szybko poprawione, natomiast te drugie wymagają planowych i długotrwałych działań zarówno ze strony ucznia, jak i nauczyciela. Krygowska uważała, że identyfikowanie uczniowskich błędów i planowanie terapii dydaktycznej wymaga czasu i traktowania każdego ucznia indywidualnie. Co więcej, wskazywała na konieczność budowania właściwej atmosfery zajęć szkolnych, w której uczniowie będą mieli do nauczyciela pełne zaufanie i która pozwoli na wyeliminowanie strachu przed błędem³⁶. Strachu, który towarzyszy nie tylko uczniom, ale również nauczycielom, doszukującym się w uczniowskich błędach własnych niepowodzeń dydaktycznych. Niestety, mimo dowodów na fakt, że w momencie popełniania błędów uaktywnia się mózg człowieka³⁷, to problem braku akceptacji błędów uczniowskich nadal jest

34 A. Z. Krygowska, *Zrozumieć błąd w matematyce*, „Dydaktyka Matematyki”, 10 (1989) s. 142.

35 Tamże, s. 146.

36 Tamże, s. 146.

37 Jo Boaler, *Mathematical Mindsets. Unleashing Students' POTENTIAL Trough Creative Math, Inspiring Messages and INNOVATIVE TEACHING*, San Francisco 2016, s. 11–13.

obecny w szkolnym nauczaniu³⁸. Dorota Klus-Stańska, pisząc o dominującym w monologowej edukacji „kulcie poprawności”³⁹, podkreślała, że nie możemy mówić o świadomym i aktywnym uczeniu się, jeśli nie pozwolimy uczniom na poszukiwanie odpowiedzi, samodzielne konstruowanie wiedzy i naturalne w procesie uczenia się popełnianie błędów⁴⁰.

Wśród kolejnych, niezwykle istotnych postulatów wysuwanych przez Krygowską pod adresem nauczania matematyki odnajdujemy dostosowanie aktywności matematycznych uczniów do ich poziomu w taki sposób, aby mieli świadomość roli teoretycznego myślenia w toku rozwiązywania problemów. Dbłość o przyswojenie przez nich podstaw aparatu pojęciowego, metod rozumowania specyficznych dla matematyki oraz podstaw języka matematyki uczona uznała za niezbędne do rozumienia przesyconego technologią świata i dostrzegania perspektyw jego rozwoju. Przekonywała, że kształtowanie technik uczenia się matematyki czy umiejętność wyszukiwania i porównywania informacji pozyskanych z różnych źródeł pozwoli na ugruntowanie wiedzy szkolnej. A to wszystko po to, by matematyczna szkolna wiedza nie zamykała nikomu drogi do dalszego rozwoju⁴¹.

Na koniec nie sposób pominąć dwóch głównych filarów, na których Krygowska opierała właściwie zorganizowane środowisko uczenia się matematyki. Pierwszy to wspomniane wcześniej organizowanie aktywnego i świadomego uczenia się matematyki⁴². Pisała:

[...] im bardziej racjonalne z punktu widzenia matematyki i psychologii organizujemy pogładowe podstawy matematyki elementarnej, im poprawniej ukierunkujemy tę pogładowość w stronę właściwej matematyzacji, tym pełniej i łatwiej aktywizujemy wyobraźnię matematyczną i myślenie matematyczne ucznia⁴³.

38 M. Karpiński, M. Zamborska, *Nauczanie matematyki w szkole podstawowej. Raport z badania*, Warszawa 2015, s. 25.

39 D. Klus-Stańska, *Konstruowanie wiedzy w szkole*, Olsztyn 2002, s. 181.

40 Tamże, s. 180–181.

41 Z. Krygowska, *Koncepcje powszechnego kształcenia w reformach programów szkolnych z lat 1960–1980*, Kraków 1981, s. 48–49.

42 Tamże, s. 3.

43 Tamże, s. 3.

Drugi to „twórcze doświadczanie” matematyki przez uczniów, które uważała za pomijane w ówczesnym nauczaniu. Postrzegała je jako niezbędny element działalności matematycznej uczniów odpowiadający jednemu z głównych celów nauczania matematyki, tj. „zapoznanie ucznia z metodą matematyczną”⁴⁴. Jej zdaniem, równowaga między operatywnym przyswojeniem strukturalnie zorganizowanej wiedzy matematycznej i operatywnym opanowaniem metody matematycznej a intensywnym rozwojem twórczych możliwości i zainteresowań uczniów musi być zachowana⁴⁵.

Dziś, analizując zapisy podstawy programowej kształcenia ogólnego, wśród zadań szkoły i celów ogólnych kształcenia odnajdujemy zapisy analogiczne do idei głoszonych przez prof. Krygowską. W przytoczonym akcie prawnym wskazuje się potrzebę wspierania wielokierunkowej aktywności dziecka poprzez eksperymentowanie i nabywanie doświadczeń. Wspieranie umiejętności uczenia się⁴⁶, samodzielnego, refleksyjnego, logicznego, krytycznego i twórczego myślenia, stawiania pytań, dostrzegania i rozwiązywania problemów czy prowadzenie wstępnej matematyzacji opisanej przez uczniów słowem, obrazem i symbolem⁴⁷ – wszystko to sprawia, że twórcze doświadczanie matematyki jest niezbędne we współczesnym nauczaniu.

Matematyka w przestrzeni kultury społecznej: ku kulturze matematycznej

Krygowska w swoich działaniach na rzecz podniesienia jakości kształcenia matematycznego nie ograniczała się jedynie do modernizacji metod nauczania. Jej ambicje sięgały znacznie dalej. Postulowała zmiany, które – w jej

44 Tamże, s. 13.

45 Tamże, s. 12–13.

46 Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej (Dz.U. 2024 poz. 996), s. 9.

47 Tamże, s. 29.

przekonaniu – miały przyczynić się do podniesienia poziomu kultury matematycznej całego społeczeństwa.

Idea kultury matematycznej dla wszystkich była szeroko dyskutowana na wielu międzynarodowych kongresach i kolokwiałach⁴⁸. Uznano, że jej celem jest wyposażenie społeczeństwa w podstawową wiedzę matematyczną, uznaną za fundamentalną na danym etapie edukacji, uporządkowaną według struktur matematycznych. Zakładała również kształtowanie świadomości dotyczącej formalnych konstrukcji matematyki, wprowadzanie w sposób rozumowania matematycznego, rozwijanie umiejętności wyrażania własnych myśli matematycznych oraz opanowanie indywidualnych technik uczenia się matematyki, dostosowanych do możliwości każdej jednostki⁴⁹.

Można przypuszczać, że koncentracja na tych właśnie aspektach wynikała z szeroko pojmowanej przez ówczesne środowisko naukowe użyteczności matematyki. Podkreślano, że jej wartość nie ogranicza się wyłącznie do wymiaru praktycznego – czyli sprawnego posługiwania się narzędziami wypracowanymi podczas zajęć szkolnych, takimi jak rachunki, algorytmy czy metody rozwiązywania typowych zadań – lecz obejmuje również rozwój kompetencji poznawczych, logicznych i komunikacyjnych⁵⁰.

Dlatego, wobec tak postawionych celów, w nauczaniu matematyki na każdym poziomie należy zwrócić się w kierunku takich aktywności matematycznych jak: abstrahowanie, schematyzowanie i matematyzowanie, dedukowanie, uogólnianie, definiowanie, jasne prezentowanie własnego rozumowania, dostrzeganie i formułowanie problemów czy weryfikacja rezultatów własnych działań. Aktywności te Krygowska określiła jako specyficzne aktywności matematyczne i uznała za niezwykle istotne w nauczaniu, co więcej możliwe do realizacji na każdym poziomie nauczania⁵¹.

48 A. Z. Krygowska, *Problemy nowoczesnego kształcenia nauczycieli matematyki*, s. 111–117; Z. Krygowska, *Niektóre tendencje występujące w matematyce współczesnej a nauczanie matematyki w szkole powszechnej*, „Matematyka. Czasopismo dla Nauczycieli”, 28 (1975) s. 103–114.

49 A. Z. Krygowska, *Problemy nowoczesnego kształcenia nauczycieli matematyki*, s. 112–113.

50 Z. Krygowska, *Niektóre tendencje występujące w matematyce współczesnej* s. 103–114.

51 Z. Krygowska, *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*, „Dydaktyka Matematyki”, 6(1986) nr 1, s. 30.

Doskonała znajomość stanu edukacji matematycznej w Polsce, w połączeniu z możliwością porównania jej z wyzwaniem występującymi w innych krajach, pozwoliła Krygowskiej na przeprowadzenie pogłębionej analizy systemowej oraz zaproponowanie zmiany roli, jaką matematyka odgrywa w społeczeństwie. Tak pisała o koncepcji kultury matematycznej dla wszystkich:

Oczywiście konkretna interpretacja koncepcji kultury matematycznej dla wszystkich musi uwzględniać możliwości uczniów i warunki nauczania – tak w zakresie samej treści, jak i poziomu abstrakcji. Ale to zastrzeżenie nie zmienia istoty tej koncepcji: kultura matematyczna społeczeństwa w dobie obecnej – to nie tylko pewna sprawność w arytmetycznych najprostszych rachunkach i nie tylko znajomość pewnych prostych pojęć i twierdzeń geometrycznych, to przede wszystkim rozumienie metody matematycznego myślenia i rozwiązywania problemów, rozumienie charakteru relacyjnego i strukturalnego współczesnej matematyki, rozumienie, że właśnie dzięki tej cesze matematyka stała się wszędzie obecna w naszej cywilizacji⁵².

Współczesne rozumienie kultury matematycznej współbrzmi z ideą „kultury matematycznej dla wszystkich” propagowanej przez prof. Krygowską. Podobnie jak kilka dekad temu obejmuje ona znacznie więcej niż tylko znajomość pojęć, definicji i algorytmów. Wykracza daleko poza tradycyjne postrzeganie matematyki, uwzględniając rozwój kompetencji poznawczych, postaw, wartości oraz umiejętności komunikacyjnych związanych z rozumieniem i stosowaniem matematyki w różnych aspektach życia społecznego⁵³.

W świetle współczesnych badań kultura matematyczna jawi się jako wielowymiarowy konstrukt, który rozwija się nie tylko w ramach formalnej edukacji, lecz także poprzez działania nieformalne, artystyczne i społeczne. Zdaniem Małgorzaty Makiewicz, obejmuje ona również zdolność dostrzegania piękna matematyki, twórczość oraz elegancję myślenia. Jej dociekania wykazały, że działania artystyczne i refleksja angażują uczniów w interpretację

52 A. Z. Krygowska, *Problemy nowoczesnego kształcenia nauczycieli matematyki*, s. 113.

53 M. Makiewicz, *Model kultury matematycznej ucznia*, „Edukacja – Technika – Informatyka”, 9 (2018) nr 4, s. 23–29.

matematyki jako części kultury, umożliwiając jej codzienne doświadczanie⁵⁴. Natomiast Agnieszka Bojarska-Sokołowska w swoich badaniach udowodniła, że odpowiednio zaprojektowane środowisko edukacyjne może wspierać rozwój kultury matematycznej poprzez interaktywne, kontekstowe i refleksyjne uczenie się⁵⁵.

Obecnie kulturę matematyczną należy postrzegać jako integralny element kultury społecznej. Zakorzeniona w tradycji humanistycznego podejścia do edukacji, obejmuje całokształt kompetencji, postaw i wartości, które umożliwiają jednostce świadome uczestnictwo w matematycznym dyskursie oraz rozumienie i stosowanie matematyki w różnych kontekstach życia społecznego. W tym świetle przesłanie Krygowskiej pozostaje nadal aktualne, skoro już w połowie XX w. dostrzegała potrzebę „kultury matematycznej dla wszystkich”, czyli edukacji matematycznej dostępnej, zrozumiałej i rozwijającej potencjał każdego ucznia.

Podsumowanie

Współczesna edukacja matematyczna nadal wymaga naszego zaangażowania i troski, szczególnie gdy zdajemy sobie sprawę, że jest czymś znacznie szerszym niż tylko przekazywaniem wiedzy i ćwiczeniem sprawności rachunkowych. W świecie, w którym trudno o stabilizację i jednoznaczne wyznaczenie kierunków działania, decyzje podejmowane przez jednostki mogą prowadzić do niepożądanych konsekwencji. Dlatego koncepcja „kultury matematycznej dla wszystkich” pozostaje niezwykle aktualna. Wynika z niej, że edukacja matematyczna powinna kształtować sposób myślenia i komunikowania się, wyzwalać potencjał uczniów poprzez świadome i aktywne nabywanie kompetencji. Dostrzeganie i rozwiązywanie problemów, umiejętność precyzyjnego argumentowania oraz krytyczne myślenie nabierają dziś szczególnego znaczenia. To właśnie odpowiednio zorganizowane środowisko uczenia się matematyki

54 M. Makiewicz, *Matematyka w obiektywie. Kultura matematyczna dla nauczycieli*, Szczecin 2010, s. 9.

55 A. Bojarska-Sokołowska, *Elementy kultury matematycznej w centrach nauki*, „Kultura – Społeczeństwo – Edukacja”, 2 (2023) s. 69–83, DOI: 10.14746/kse.2023.24.2.4.

umożliwia rozwój kompetencji poznawczych, wspiera rozwój osobisty ucznia, buduje jego świadomość społeczno-kulturową, pokazując, że matematyka jest językiem współczesnego świata, a także wzmacnia autonomię jednostki, czyniąc ją świadomym uczestnikiem rzeczywistości.

Anna Zofia Krygowska nie ograniczyła postulatu „kultury matematycznej dla wszystkich” do poziomu idei, lecz wskazała konkretne działania warunkujące jego realizację. W jej ujęciu kluczowe znaczenie przypisuje się właściwemu przygotowaniu nauczycieli oraz ich aktywnemu udziałowi w konstruowaniu procesu uczenia się. W publikacjach i wystąpieniach, opartych na analizie międzynarodowych doświadczeń, Krygowska prezentowała rozwiązania poddawane dyskusji w gremiach naukowych. Zawężenie perspektywy edukacji matematycznej do mechanicznego opanowania procedur prowadzi, jej zdaniem, do zubożenia procesu kształcenia, skutkując niechęcią do matematyki oraz brakiem umiejętności jej praktycznego zastosowania. Tymczasem „kultura matematyczna dla wszystkich” w rozumieniu Krygowskiej oznacza nie tylko dostęp do wiedzy, lecz również zdolność do jej twórczego wykorzystania.

Streszczenie: Dyskusja na temat dobrego przygotowania matematycznego uczniów na każdym etapie edukacji pozostaje żywa i niezwykle aktualna na całym świecie. Poszukiwania rozwiązań systemowych i dydaktycznych wciąż budzą duże zainteresowanie wśród osób zaangażowanych w rozwój kompetencji matematycznych kolejnych pokoleń. Z tego powodu w artykule podjęto rozważania nad poglądami prof. Anny Zofii Krygowskiej opartymi na jej głębokiej znajomości matematyki, doświadczeniu w nauczaniu dzieci i młodzieży oraz międzynarodowych kontaktach, które zdaniem uczonej umożliwiły jej rzeczowe i merytoryczne dyskusje weryfikujące własne przekonania.

W tekście omówiono trzy główne obszary międzynarodowej aktywności profsora: rolę nauczyciela i jego przygotowanie do pracy dydaktycznej, świadome i aktywne kształtowanie procesu uczenia się matematyki oraz koncepcję „kultury matematycznej dla wszystkich”.

Słowa kluczowe: kultura matematyczna, rola nauczyciela, świadome i aktywne uczenie się matematyki.

Bibliografia

Źródła archiwalne

Archiwum Uniwersytetu Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie
Akta osobowe Z. Krygowskiej
Dokumentacja Wydziału Matematyczno-Fizycznego Wyższej Szkoły Pedagogicznej
w Krakowie (plany pracy, sprawozdania z działalności naukowej).

Źródła publikowane

- Krygowska Z., *Języki matematyki w nauczaniu (xv Konferencja CIEAEM w Founex)*, „Matematyka. Czasopismo dla Nauczycieli”, 15 (1962) nr3(73) s. 161–169.
- Krygowska Z., *Problemy nowoczesnego kształcenia nauczycieli matematyki*, „Wiadomości Matematyczne”, 14 (1972) s. 111–117.
- Krygowska Z., *Niektóre tendencje występujące w matematyce współczesnej a nauczanie matematyki w szkole powszechnej*, „Matematyka. Czasopismo dla nauczycieli”, 28 ((1975) s. 103–114.
- Krygowska Z., *Zarys dydaktyki matematyki*, część 1, Warszawa 1979.
- Krygowska Z., *Zarys dydaktyki matematyki*, część 2, Warszawa 1977.
- Krygowska Z., *Zarys dydaktyki matematyki*, część 3, Warszawa 1977.
- Krygowska Z., *Metodyka nauczania matematyki*, Kraków 1980.
- Krygowska Z., *Główne problemy i kierunki badań współczesnej dydaktyki matematyki*, „Dydaktyka Matematyki”, 1 (1982) s. 7–60.
- Krygowska Z., *Koncepcje powszechnego kształcenia w reformach programów szkolnych z lat 1960–1980*, Kraków 1981.
- Krygowska Z., *Metodologiczne i psychologiczne podstawy czynnościowej metody nauczania matematyki*, w: F. Kiryk, *Wyższa Szkoła Pedagogiczna im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie w 40 roku działalności*, Kraków 1986, s. 449–465.
- Krygowska Z., *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*, „Dydaktyka Matematyki”, 6 (1986) nr 1, s. 30.
- Krygowska A. Z., *Zrozumieć błąd w matematyce*, „Dydaktyka Matematyki”, 10 (1989) s. 141–147.
- Krygowska A. Z., *CIEAEM 39*, „Dydaktyka Matematyki”, 10 (1989) s. 149–160.

Opracowania

- Benek K., *Nowe wyzwania dla polskiej nauki: kompetencje miękkie*, „Zeszyty Naukowe Akademii Górnośląskiej”, (2024) nr 1, s. 146–152, DOI: 10.53259/2024.01.16.
- Boaler J., *Mathematical Mindsets. Unleashing Students' POTENTIAL Trough Creative Math, Inspiring Messages and INNOVATITE TEACHING*, San Francisco 2016.

- Bojarska-Sokołowska A., *Elementy kultury matematycznej w centrach nauki*, „Kultura – Społeczeństwo – Edukacja”, 2 (2023) s. 69–83, DOI:10.14746/kse.2023.24.2.4.
- Ciosek M., *O wpływie Anny Zofii Krygowskiej na dydaktykę matematyki na świecie*, „Dydaktyka Matematyki”, 28 (2005) s. 129–154.
- Czajkowska M., Grochowalska M., Orzechowska M., *Potrzeby nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej i nauczycieli matematyki w zakresie rozwoju zawodowego*, Warszawa 2015.
- Inhelder B., Piaget J., *Od logiki dziecka do logiki młodzieży. Rozprawa o kształtowaniu się formalnych struktur operacyjnych*, Warszawa 1970.
- Karpiński M., Zamborska M., *Nauczanie matematyki w szkole podstawowej. Raport z badania*, Warszawa 2015.
- Klus-Stańska D., *Konstruowanie wiedzy w szkole*, Olsztyn 2002.
- Kochanowska E., *Wymiary profesjonalizmu nauczyciela wczesnej edukacji z perspektywy kandydatów do zawodu*, „Forum Pedagogiczne”, 10 (2020) 1, s. 95–110, DOI: 10.21697/fp.2020.1.08.
- Makiewicz M., *Model kultury matematycznej ucznia*, „Edukacja – Technika – Informatyka”, 9 (2018) nr 4, s. 23–29.
- Makiewicz M., *Matematyka w obiektywie. Kultura matematyczna dla nauczycieli*, Szczecin 2010.
- Siwek H., *Profesor Krygowska – niezwykle człowiek, tytan pracy*, „Dydaktyka Matematyki”, 28 (2005) s. 84–98.
- Szempruch J., *Problemy kształcenia i doskonalenie nauczycieli w Polsce – w kierunku profesjonalizacji zawodu*, „Studia BAS”, 2 (2022) s. 27–47, DOI: 10.31268/Studia-BAS.2022.11.
- Zbróg Z., Kaleta-Witusiak M., Walasek-Jarosz B., *Kompetencje nauczyciela w zakresie sprawnego prowadzenia lekcji*, Kielce 2013, s. 21–64.