

## Prognozowanie rynku pracy woj. lubelskiego z wykorzystaniem modeli ARIMA i ARIMAX

Jarosław Bielak

Wyższa Szkoła Zarządzania i Administracji w Zamościu.

**Streszczenie:** W artykule przedstawiono metodę prognozowania rynku pracy – poziomu bezrobocia i przeciętnego zatrudnienia – w woj. lubelskim w oparciu o modele ARIMA i ARIMAX. Dodatkowymi zmiennymi egzogenicznymi wprowadzonymi do standardowych modeli ARIMA były szeregi wartości indeksu nastrojów gospodarczych. Pokazano różnice we wskaźnikach charakteryzujących jakość prognoz generowanych przez model ARIMAX i „czysty” model ARIMA. Uwzględniono modele budowane dla danych kwartalnych i miesięcznych oraz omówiono sposób konwersji kwartalnych szeregów czasowych indeksu nastrojów gospodarczych do szeregów miesięcznych. Wykonano analizę weryfikującą przydatność takiej metody prognozowania i korzyści płynące z jej stosowania.

### Wstęp

Modele postaci ARIMA<sup>1</sup> opisuje się za pomocą uniwersalnej notacji  $(p\ d\ q)(P\ D\ Q)$ . Użyte w tym zapisie litery oznaczają: niesezonowe składniki autoregresyjne rzędu  $p$ , średnią ruchomą rzędu  $q$  oraz odpowiednio sezonowe składniki autoregresyjne rzędu  $P$  i sezonową średnią ruchomą rzędu  $Q$ . Dodatkowo, jeśli badany szereg jest niestacjonarny, zostaje on na wstępie  $d$ -krotnie (oraz jeśli to konieczne,  $D$ -krotnie – tj. sezonowo) zróżnicowany w celu otrzymania procesu stacjonarnego.

Proces stacjonarny można scharakteryzować w skrócie jako szereg czasowy, w którym występują jedynie wahania losowe wokół stałej średniej. W modelach typu ARIMA przed estymacją parametrów dokonuje się sprowadzania analizowanego szeregu do postaci stacjonarnej.

Podstawowa postać modelu ARIMA może być przedstawiona jako:

$$[1] \quad \phi(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t,$$

gdzie  $\phi(L)$  i  $\theta(L)$  są wielomianami operatora opóźnień  $L$ , który jest zdefiniowany jako  $L^n y_t = y_{t-n}$ , a  $\varepsilon_t$  jest procesem białego szumu. Po wprowadzeniu do modelu operatora opóźnień sezonowych  $s$  ( $s = 4$  dla danych kwartalnych i  $s = 12$  dla danych miesięcznych) model przyjmuje postać:

$$[2] \quad \phi(L)\Phi(L^s)y_t = \theta(L)\Theta(L^s)\varepsilon_t.$$

W celu wyeliminowania niesezonowych i sezonowych pierwiastków jednostkowych z modelowanego szeregu, a więc sprowadzenia go do stacjonarności, dokonuje się jego różnicowania, czyli  $d$ -krotnego wyznaczenia pierwszych przyrostów zmiennej i  $D$ -krotnego wyznaczenia sezonowych przyrostów zmiennej. Otrzymany w ten sposób szereg poddaje się analizie i w rezultacie otrzymuje się model:

$$[3] \quad \phi(L)\Phi(L^s)(1-L)^d(1-L^s)^D y_t = \theta(L)\Theta(L^s)\varepsilon_t,$$

gdzie  $(1-L)^d y_t = \Delta^d y_t$  oraz  $(1-L^s)^D y_t = \Delta^D y_t$  oznaczają przyrosty modelowanej zmiennej.

<sup>1</sup> Ang. *Auto-Regressive Integrated Moving Average*.

Rozszerzeniem modelu ARIMA może być model ARIMAX<sup>2</sup>, w którym zdekomponowany (z wykorzystaniem standardowej procedury X-12-ARIMA) szereg  $y_t$  występuje w roli zmiennej objaśnianej, a dodatkowe zmienne egzogeniczne  $x_{kt}$  wraz z oszacowanymi dla nich parametrami stanowią model regresji liniowej, której reszty  $\varepsilon_t$  podlegają procesowi ARIMA. Otrzymujemy zatem równanie postaci:

$$[4] \quad \phi(L)\Phi(L^s)(1-L)^d(1-L^s)^D \left( y_t - \sum_{i=1}^k \beta_i x_{it} \right) = \theta(L)\Theta(L^s)\varepsilon_t.$$

Generalnie model ten jest rozszerzeniem podstawowej postaci równania ARMA, gdzie zmienna modelowana  $y_t$  ma średnią  $\mu$  różną od zera  $\phi(L)(y_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t$  lub w innej formie:  $\phi(L)y_t = \alpha + \theta(L)\varepsilon_t$  – wtedy  $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$  – którą z kolei można przedstawić jako kombinację liniową pewnej obserwowanej zmiennej:

$$[5] \quad \phi(L)y_t = z_t\gamma + \theta(L)\varepsilon_t.$$

## 1. Metoda budowy modeli prognostycznych

Do prognozowania liczby zarejestrowanych bezrobotnych i przeciętnego zatrudnienia w sektorze przedsiębiorstw w woj. lubelskim zastosowano metodę, którą można nazwać „podwójnym modelowaniem”. W pierwszym etapie zbudowano optymalne modele ARIMA dla badanej zmiennej, wykorzystując w tym celu standardową procedurę X-12-ARIMA pozwalającą na automatyczny wybór najlepszego równania modelu<sup>3</sup> (procedura ta jest zaimplementowana w ogólnodostępnych modułach dla wielu pakietów statystyczno-ekonometrycznych). Modele i wykresy w tym opracowaniu zostały uzyskane za pomocą programu *gretl*<sup>4</sup>. Zastosowanie procedury X-12-ARIMA<sup>5</sup> pozwala na wyodrębnienie składowych szeregu czasowego, tj. trendu/cykli, wahań sezonowych oraz wahań przypadkowych. Dzięki temu można wskazać ogólne tendencje rozwojowe i zmierzyć amplitudę wahań sezonowych badanych zjawisk. Następnie do otrzymanych modeli wprowadzono dodatkowe zmienne egzogeniczne – uzyskując w ten sposób modele typu ARIMAX – w tym wypadku zróżnicowane szeregi diagnostycznego i prognostycznego wskaźnika nastrojów gospodarczych uzyskane na podstawie kwartalnych badań ankietowych<sup>6</sup>. Dla każdej z modelowanych zmiennych zbudowano i oszacowano kilkadziesiąt równań modeli, z których wyselekcjonowano najpierw równania ze wszystkimi parametrami istotnymi statystycznie na poziomie  $p = 0,05$ , a następnie wybierano najlepsze z nich. Kryterium wyboru były miary dokładności prognoz *ex post* oraz kryteria informacyjne Akaike’a (AIC), Schwarza (BIC) i Hannana-Quinna (HQC). Przy wyborze najlepszego modelu były brane pod uwagę następujące błędy prognoz<sup>7</sup>:

$$[6a] \quad \text{średni błąd predykcji}^8 \quad \text{ME} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t,$$

$$[6b] \quad \text{błąd średniokwadratowy}^9 \quad \text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2,$$

<sup>2</sup> Ang. *Auto-Regressive Integrated Moving Average with eXtra/eXternal*.

<sup>3</sup> Chodzi tutaj o dobór optymalnych wartości  $p$ ,  $d$ ,  $q$  i  $P$ ,  $D$ ,  $Q$ , czyli opóźnień oraz różnicowania szeregu.

<sup>4</sup> GNU Regression, Econometrics and Time-series Library *gretl* (<http://gretl.sourceforge.net/>).

<sup>5</sup> Zaimplementowany w programie *gretl* algorytm służący do automatycznego wyboru najlepszego modelu jest opatrzony następującą uwagą: „X-12-ARIMA Seasonal Adjustment Method, Release Version 0.3 Build 177. This method modifies the X-11 variant of Census Method II by J. Shiskin A.H. Young and J.C. Musgrave of February, 1967 and the X-11-ARIMA program based on the methodological research developed by Estela Bee Dagum, Chief of the Seasonal Adjustment and Time Series Staff of Statistics Canada, September, 1979. This version of X-12-ARIMA includes an automatic ARIMA model selection procedure based largely on the procedure of Gomez and Maravall (1998) as implemented in TRAMO (1996)”.

<sup>6</sup> Ankietowe kwartalne badania nastrojów gospodarczych w woj. lubelskim są prowadzone od II kwartału 2001 r.

<sup>7</sup> Polskie nazwy błędów podajemy za tłumaczami interfejsu programu *gretl* na język polski: Tadeuszem Kuflem i Pawłem Kuflem z Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu.

<sup>8</sup> Ang. *Mean Error*.

<sup>9</sup> Ang. *Mean Squared Error*.

[6c]	pierwiastek błędu średniokwadratowego <sup>10</sup>	$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2},$
[6d]	średni błąd absolutny <sup>11</sup>	$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n  e_t ,$
[6e]	średni błąd procentowy <sup>12</sup>	$\text{MPE} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n 100 \frac{e_t}{y_t},$
[6f]	średni absolutny błąd procentowy <sup>13</sup>	$\text{MAPE} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n 100 \frac{ e_t }{y_t}.$

Współczynnik Theila  $U$  jest miarą dokładności prognoz i przyjmuje wartości od 0 do 1. Może on być interpretowany jako stosunek błędu RMSE danego modelu do błędu RMSE modelu naiwnego, dla którego prognoza  $y_t^* = y_{t-1}$ . Dla modelu naiwnego współczynnik Theila jest równy 1, dla modeli dających prognozy obciążone małymi błędami – zbliża się do zera. Współczynnik Theila jest obliczany ze wzoru:

$$[7] \quad U = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-1} \left( \frac{y_{t+1}^* - y_{t+1}}{y_t} \right)^2} \cdot \left[ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-1} \left( \frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} \right)^2 \right]^{-1}.$$

Wymienione wcześniej kryteria informacyjne (AIC, BIC, HQC) są obliczane na podstawie wartości funkcji największej wiarygodności  $\ell(\hat{\theta})$ , liczby estymowanych w modelu parametrów  $k$  oraz liczby obserwacji  $n$ . Im mniejsze wartości kryteriów informacyjnych, tym model jest lepiej dopasowany:

[8a]	$\text{AIC} = -2\ell(\hat{\theta}) + 2k,$
[8b]	$\text{BIC} = -2\ell(\hat{\theta}) + k \log n,$
[8c]	$\text{HQC} = -2\ell(\hat{\theta}) + 2k \log \log n.$

W pierwszym etapie desezonalizowano i sprowadzano do stacjonarności szereg badanej zmiennej oraz „wychwytywano” jej trend długookresowy i zachowania cykliczne. W drugim etapie wprowadzono do otrzymanego modelu ARIMA dodatkową zmienną objaśniającą i ponownie estymowano parametry modelu, zachowując przy tym w modelu ARIMAX rzędy opóźnienia procesu autoregresyjnego i procesu średniej ruchomej uzyskane wcześniej dla modelu ARIMA. Zwracamy uwagę, że „czysty” model ARIMA był budowany dla dłuższego szeregu (od II kwartału 1999 r.), niż pozwalałyby szereg wartości barometru nastrojów gospodarczych (który rozpoczyna się od II kwartału 2001 r.) – ma to szczególne znaczenie dla modeli opartych na danych kwartalnych, gdyż te szeregi czasowe zawierają stosunkowo mało obserwacji<sup>14</sup>.

## 2. Modele i prognozy (ARIMA/ARIMAX)

Na podstawie zebranych danych zbudowano modele ARIMA dla następujących zmiennych charakteryzujących rynek pracy woj. lubelskiego:

- przeciętnego zatrudnienia w sektorze przedsiębiorstw ogółem w kwartale/miesiącu,
- liczby zarejestrowanych bezrobotnych w końcu kwartału/miesiąca.

<sup>10</sup> Ang. *Root Mean Squared Error*.

<sup>11</sup> Ang. *Mean Absolute Error*.

<sup>12</sup> Ang. *Mean Percentage Error*.

<sup>13</sup> Ang. *Mean Absolute Percentage Error*.

<sup>14</sup> Po dwukrotnym zróżnicowaniu pozostało tylko 39 obserwacji dla modeli ARIMA i 27 obserwacji dla modeli ARIMAX.

Prognozy tych zmiennych wyznaczono na podstawie zbudowanych modeli ARIMA (dla porównania) oraz na podstawie modeli zmodyfikowanych do postaci typu ARIMAX. Wybrano następujące zmienne jako potencjalne dodatkowe zmienne objaśniające:

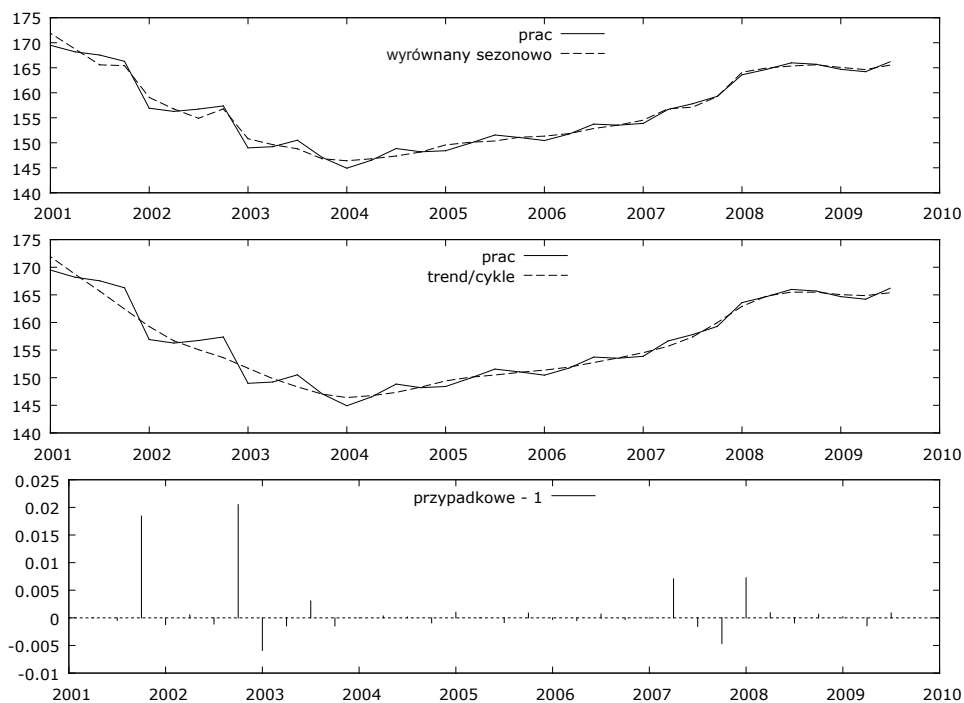
- diagnostyczny i prognostyczny barometr nastrojów (ogólny),
- diagnostyczny i prognostyczny barometr nastrojów gospodarczych firm,
- diagnostyczny i prognostyczny wskaźnik nastrojów gospodarstw domowych.

Wartości tych zmiennych były opóźniane względem wartości zmiennej prognozowanej tak, aby możliwe było uzyskanie prognoz na 3 następne okresy (kwartały/miesiące).

## 2.1. Modele dla danych kwartalnych

Obecnie przedstawione zostaną uzyskane w wyniku estymacji metodą X-12-ARIMA modele ARIMA oraz modele ARIMAX dla szeregów czasowych o częstotliwości kwartalnej. W celu łatwiejszego porównania wyników w tabelach zawarto błędy *ex post* prognoz wygasłych oraz prognozy na 3 kolejne kwartały dla obu typów modeli. Na rysunkach pokazano wyniki dekompozycji szeregów czasowych na składowe metodą X-12-ARIMA oraz przedziały prognoz liczby zarejestrowanych bezrobotnych i przeciętnego zatrudnienia w sektorze przedsiębiorstw dla obu rodzajów modeli.

### 2.1.1. Przeciętne zatrudnienie w sektorze przedsiębiorstw (w tys. osób)<sup>15</sup>



Rys. 1. Dekompozycja szeregu przeciętnego zatrudnienia w sektorze przedsiębiorstw

#### Model 1. Wyniki estymacji modelu ARIMA przeciętnego zatrudnienia w sektorze przedsiębiorstw

Estymacja ARIMA, wykorzystane obserwacje 2001:2-2009:3 (N = 34)  
 Estymacja z wykorzystaniem filtra Kalmana (właściwa ML)  
 Zmienna zależna: (1-L) prac  
 Błędy standardowe na bazie Hessian

	współczynnik	błąd standardowy	t-Studenta	wartość p
Phi_1	0,692800	0,135268	5,122	3,03e-07 ***
Średn, arytm, zm, zależnej	-0,096804			Odch, stand, zm, zależnej 2,688599
Średnia zaburzeń los,	-0,025283			Odch, st, zaburzeń los, 2,030930
Logarytm wiarygodności	-73,64045			Kryt, inform, Akaike'a 151,2809
Kryt, bayes, Schwarz	154,3336			Kryt, Hannana-Quinna 152,3220

<sup>15</sup> Z powodu trudności w uzyskaniu jednolitych danych dla całego badanego okresu wartości liczbowe uzyskano poprzez zagregowanie danych miesięcznych.

Model 2. Wyniki estymacji modelu ARIMAX przeciętnego zatrudnienia w sektorze przedsiębiorstw.  
 Dodatkowa zmienna egzogeniczna: zróżnicowany szereg wskaźnika diagnostycznego nastrojów gospodarstw domowych (d\_bgd\_3) opóźniony o 3 kwartały

Estymacja ARMAX, wykorzystane obserwacje 2002:2-2009:3 (N = 30)  
 Estymacja z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów (warunkowa ML)  
 Zmienna zależna: (1-L) prac

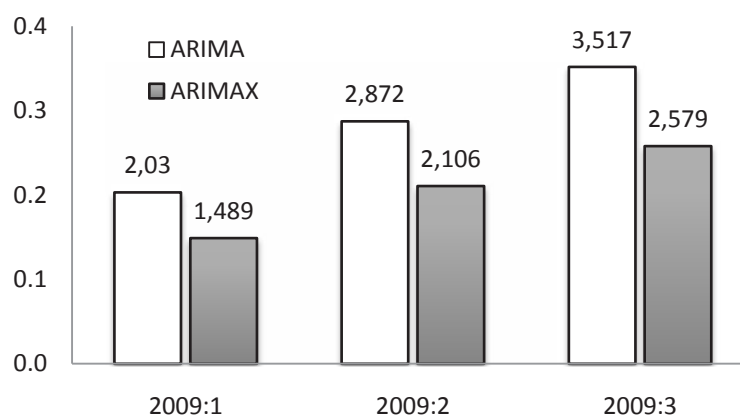
	współczynnik	błąd standardowy	t-Studenta	wartość p	
Phi_1	0,623479	0,103025	6,052	1,43e-09	***
d_bgd_3	0,156806	0,0485056	3,233	0,0012	***
Średn, aryt, zm, zależnej	0,309644	Odch, stand, zm, zależnej	2,231743		
Średnia zaburzeń los,	0,287889	Odch, st, zaburzeń los,	1,489263		
Logarytm wiarygodności	-53,48170	Kryt, inform, Akaike'a	110,9634		
Kryt. bayes. Schwarza	113.7658	Kryt. Hannana-Quinna	111.8599		

Tab. 1. Miary dokładności prognoz *ex post* modeli ARIMA i ARIMAX przeciętnego zatrudnienia w sektorze przedsiębiorstw

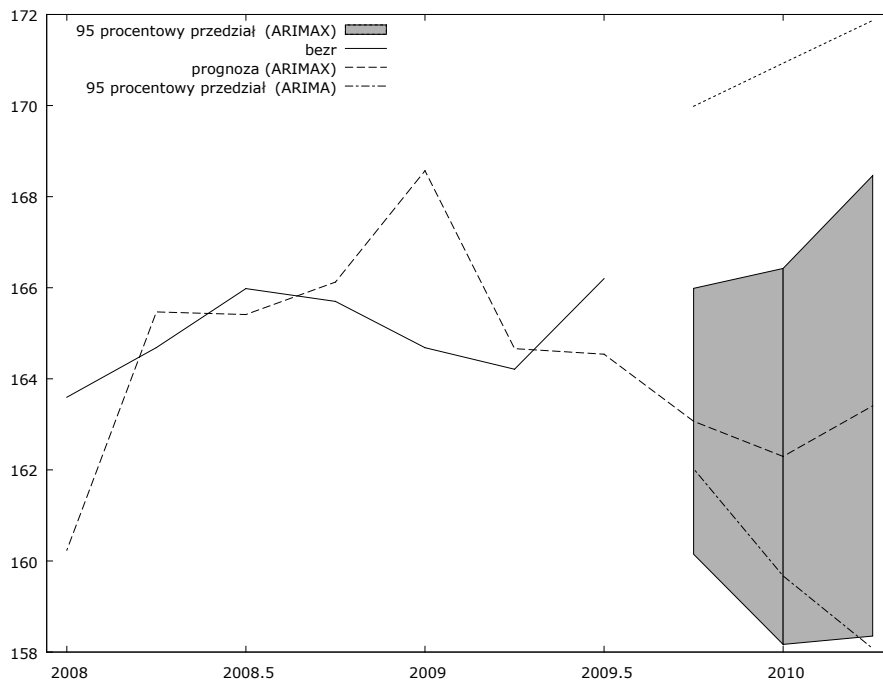
Miary dokładności prognoz <i>ex post</i>	Model ARIMA	Model ARIMAX
Średni błąd predykcji (ME)	-0,025	0,287
Błąd średniokwadratowy (MSE)	5,417	2,070
Pierwiastek błędu średniokwadratowego (RMSE)	2,327	1,438
Średni błąd absolutny (MAE)	1,547	1,113
Średni błąd procentowy (MPE)	-0,003	0,188
Średni absolutny błąd procentowy (MAPE)	0,993	0,715
Współczynnik Theila (w procentach) (U)	0,872	0,640

Tab. 2. Prognozy przeciętnego zatrudnienia w sektorze przedsiębiorstw z modeli ARIMA i ARIMAX

Kwartał	Prognoza	Błąd <i>ex ante</i>	95-procentowy przedział ufności
Model ARIMA			
2009:4	166,004	2,030	162,024–169,985
2010:1	165,300	2,872	159,671–170,930
2010:2	164,973	3,517	158,078–171,867
Model ARIMAX			
2009:4	163,067	1,489	160,148–165,986
2010:1	162,295	2,106	158,167–166,423
2010:2	163,406	2,579	158,350–168,461

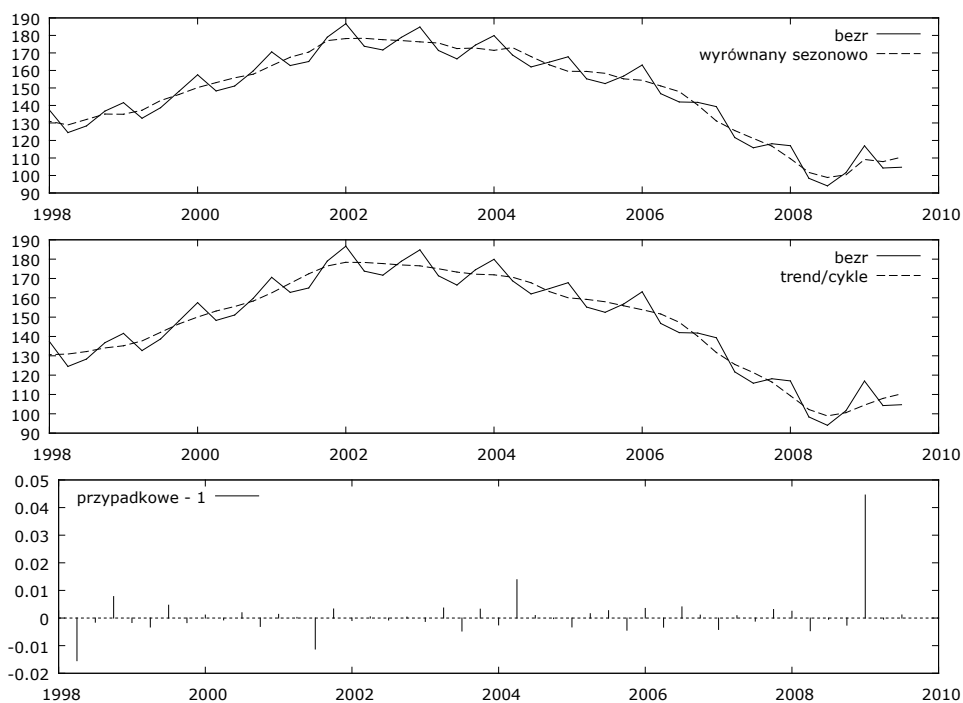


Rys. 2. Błędy *ex ante* prognoz przeciętnego zatrudnienia w sektorze przedsiębiorstw dla modeli ARIMA i ARIMAX



Rys. 3. Prognoza przedziałowa przeciętnego zatrudnienia w sektorze przedsiębiorstw z modeli ARIMA i ARIMAX

### 2.1.2. Liczba zarejestrowanych bezrobotnych



Rys. 4. Dekompozycja szeregu liczby zarejestrowanych bezrobotnych

#### Model 3. Wyniki estymacji modelu ARIMA liczby zarejestrowanych bezrobotnych

Estymacja ARIMA, wykorzystane obserwacje 1999:2-2009:3 (N = 42)

Estymacja z wykorzystaniem filtra Kalmana (właściwa ML)

Zmienna zależna:  $(1-L)(1-Ls)$  bezr

Błędy standardowe na bazie Hessian

	współczynnik	błąd standardowy	t-Studenta	wartość p
-----	-----	-----	-----	-----
phi_1	0.513165	0.133217	3.852	0.0001 ***
Średn.aryt.zm.zależnej	0.153571	Odch.stand.zm.zależnej	4.296399	
Średnia zaburzeń los.	0.132886	Odch.st. zaburzeń los.	3.647924	

Logarytm wiarygodności -114.1029 Kryt. inform. Akaike'a 232.2058  
 Kryt. bayes. Schwarz 235.6811 Kryt. Hannana-Quinna 233.4796

Model 4. Wyniki estymacji modelu ARIMAX liczby zarejestrowanych bezrobotnych. Dodatkowa zmienna egzogeniczna: zróżnicowany szereg barometru ogólnego diagnostycznego (d\_bod\_3) opóźniony o 3 kwartały

Estymacja ARMAX, wykorzystane obserwacje 2003:3-2009:3 (N = 25)  
 Estymacja z wykorzystaniem filtra Kalmana (właściwa ML)  
 Zmienna zależna: (1-L)(1-Ls) bezr  
 Błędy standardowe na bazie Hessian

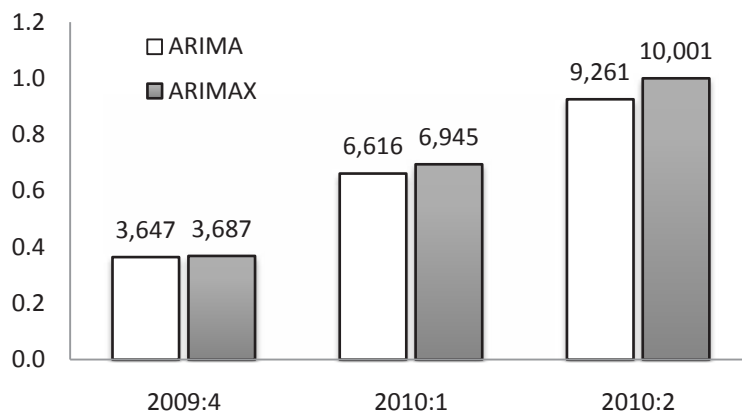
	współczynnik	błąd standardowy	t-Studenta	wartość p	
phi_1	0.596130	0.156637	3.806	0.0001	***
d_bod_3	-0.0966081	0.0448494	-2.154	0.0312	**
Średn.aryt.zm.zależnej	0.522000	Odch.stand.zm.zależnej	4.833388		
Średnia zaburzeń los.	0.320171	Odch.st. zaburzeń los.	3.687678		
Logarytm wiarygodności	-68.31793	Kryt. inform. Akaike'a	142.6359		
Kryt. bayes. Schwarz	146.2925	Kryt. Hannana-Quinna	143.6500		

Tab. 3. Miary dokładności prognoz *ex post* modeli ARIMA i ARIMAX liczby zarejestrowanych bezrobotnych

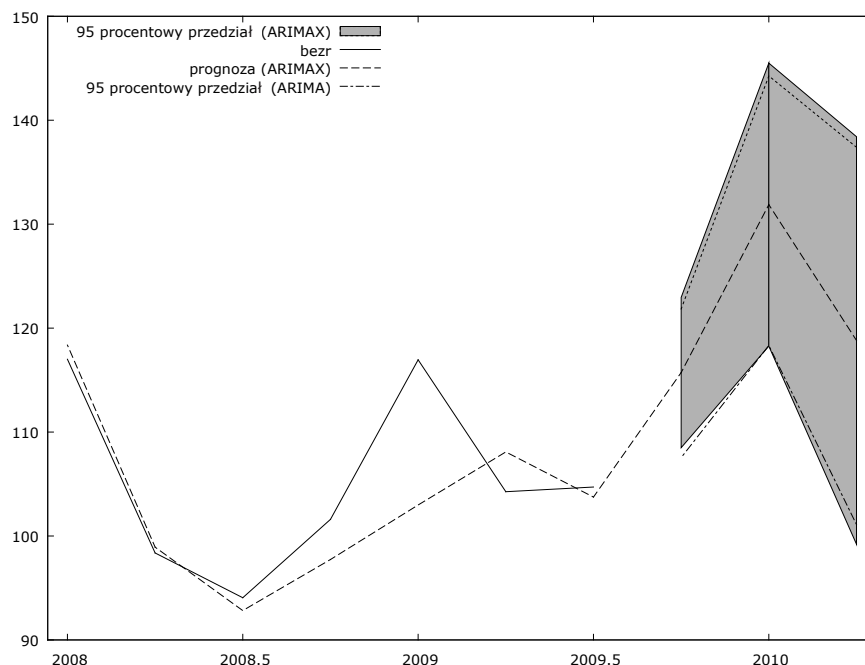
Miary dokładności prognoz <i>ex post</i>	Model ARIMA	Model ARIMAX
Średni błąd predykcji (ME)	0,132	0,320
Błąd średniokwadratowy (MSE)	13,408	13,661
Pierwiastek błędu średniokwadratowego (RMSE).	3,661	3,696
Średni błąd absolutny (MAE)	2,713	2,517
Średni błąd procentowy (MPE)	0,218	0,366
Średni absolutny błąd procentowy (MAPE)	1,913	1,942
Współczynnik Theila (w procentach) (U)	0,462	0,480

Tab. 4. Prognozy liczby zarejestrowanych bezrobotnych z modeli ARIMA i ARIMAX

Kwartał	Prognoza	Błąd <i>ex ante</i>	95-procentowy przedział ufności
Model ARIMA			
2009:4	114,691	3,647	107,541–121,841
2010:1	131,295	6,616	118,327–144,263
2010:2	119,248	9,261	101,096–137,400
Model ARIMAX			
2009:4	115,725	3,687	108,497–122,953
2010:1	131,880	6,945	118,267–145,494
2010:1	118,812	10,001	99,209–138,415



Rys. 5. Błędy *ex ante* prognoz liczby zarejestrowanych bezrobotnych dla modeli ARIMA i ARIMAX



Rys. 6. Prognoza przedziałowa liczby zarejestrowanych bezrobotnych z modeli ARIMA i ARIMAX

Zauważamy, że wprowadzenie do modeli ARIMA dodatkowej zmiennej opisującej zmiany nastrojów gospodarczych mieszkańców woj. lubelskiego może poprawiać własności prognostyczne tychże modeli. W modelu dotyczącym przeciętnego zatrudnienia w przemyśle zmniejszyły się zarówno błędy *ex post*, jak i błędy *ex ante* dla generowanych prognoz (por. tab. 1–4). Pociąga to za sobą zwięźenie przedziałów dla prognoz stawianych na kolejne trzy kwartały (por. rys. 3). W modelu opisującym liczbę bezrobotnych – pomimo tego, że wprowadzona zmienna egzogeniczna była istotna statystycznie – wprowadzenie dodatkowej zmiennej nie poprawiło własności prognostycznych modelu. W tym wypadku odnotowano jednak znaczne obniżenie wartości wszystkich kryteriów informacyjnych AIC, BIC i HQC, a co za tym idzie, model ARIMAX można uznać za lepszy. Należy również odnotować fakt, że prognozy uzyskane na podstawie modeli ARIMAX są nieco inne niż prognozy uzyskane z modeli ARIMA. Jest to spowodowane tym, że dodatkowa zmienna wprowadza do modelu nowe informacje, zmieniając zarówno oceny jego parametrów, jak i uzyskiwane prognozy.

## 2.2. Modele dla danych miesięcznych

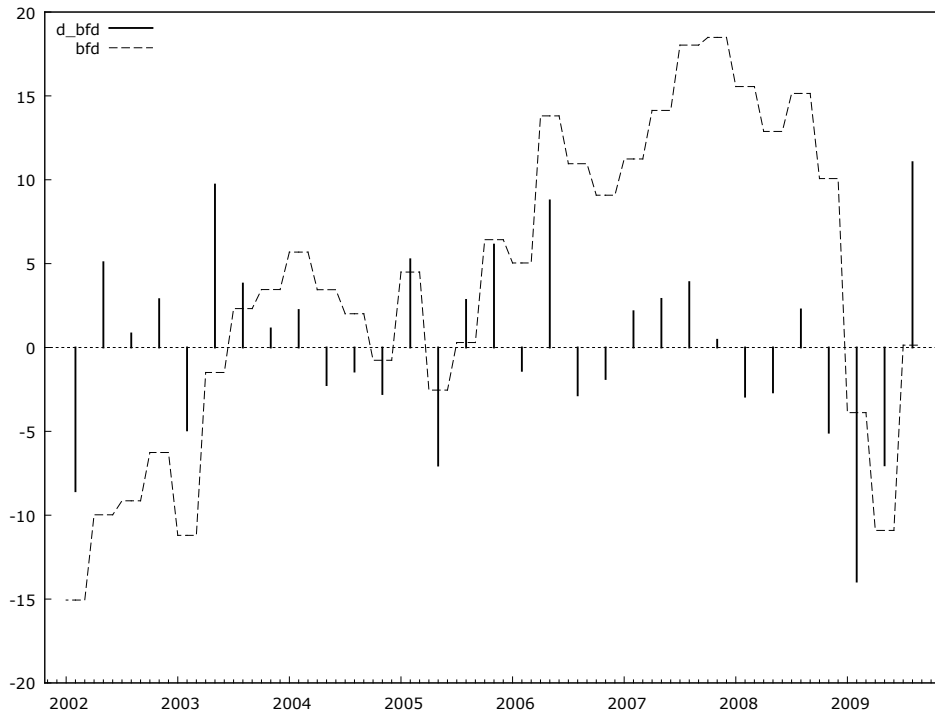
Modelowane szeregi czasowe są zbudowane na podstawie danych miesięcznych, zaś wskaźniki koniunktury uzyskiwane są na podstawie badań kwartalnych. W związku z tym zaszła konieczność uzgodnienia obserwacji kwartalnych z danymi miesięcznymi. Zaproponowano następującą procedurę transformacji danych kwartalnych wskaźników koniunktury na dane miesięczne:

1. Ankiety badania nastrojów gospodarczych w woj. lubelskim są przeprowadzane pod koniec każdego kwartału, przyjęto zatem, że uzyskane wartości wskaźnika zostaną przypisane do trzeciego miesiąca każdego kwartału.
2. Wartość wskaźnika koniunktury z trzeciego miesiąca każdego kwartału rozszerzono na drugi miesiąc danego kwartału oraz na pierwszy miesiąc kolejnego kwartału; otrzymane w ten sposób szeregi były niestacjonarne (tak, jak i szeregi oryginalne), dlatego też poddano je jednokrotnemu różnicowaniu.

W wyniku tej procedury otrzymano szeregi danych o częstotliwości miesięcznej, charakteryzujące się następującymi cechami:

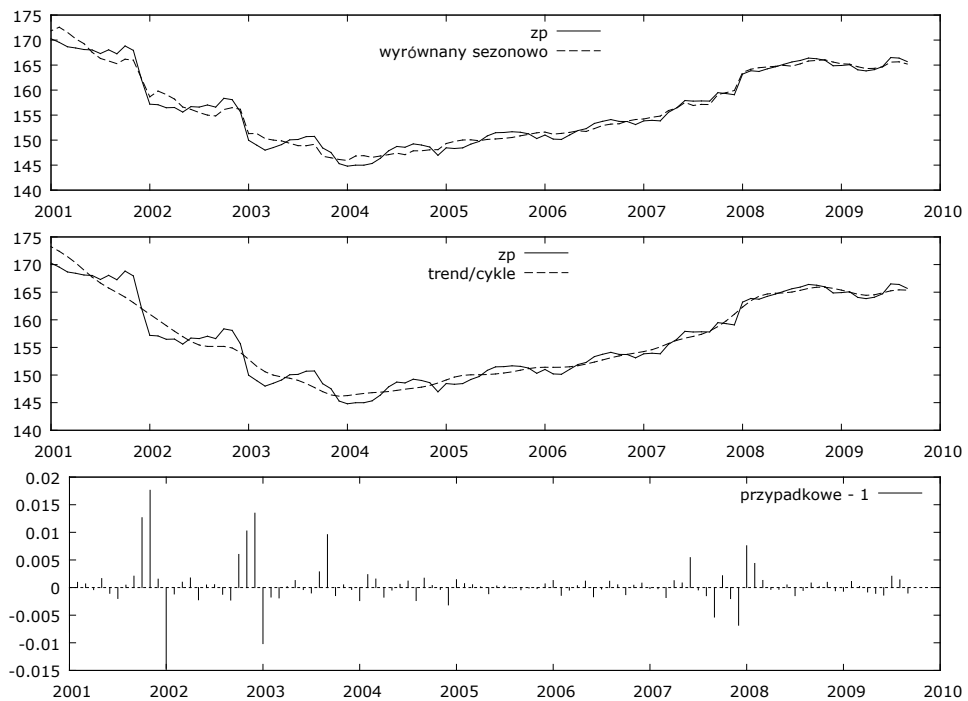
- szeregi były stacjonarne,
- nie nastąpiło sztuczne „wyprodukowanie” wartości liczbowych, których nie było w szeregu oryginalnym danych kwartalnych (tak jak to ma miejsce np. przy uśrednianiu bądź dodawaniu wartości brakujących przez wyznaczanie funkcji liniowych między punktami),
- otrzymano szeregi, które pokazują zmianę wskaźnika koniunktury raz na trzy miesiące,
- zmiany te są w szeregach „odnotowywane” w drugim miesiącu każdego kwartału, co wydaje się zharmonizowane z momentem oceny sytuacji zaistniałej w danym kwartale (własnego gospodarstwa, przedsiębiorstwa oraz gospodarki województwa) dokonywanej przez ankietowanych respondentów w tym kwartale (por. rys. 7).





Rys. 7. Diagnostyczny barometr firm (bfd) oraz zróżnicowany diagnostyczny barometr firm (d\_bfd) – częstotliwość miesięczna

### 2.2.1. Przeciętne zatrudnienie w sektorze przedsiębiorstw



Rys. 8. Dekompozycja szeregu przeciętnego zatrudnienia w sektorze przedsiębiorstw

## Model 5. Wyniki estymacji modelu ARIMA przeciętnego zatrudnienia w sektorze przedsiębiorstw

Estymacja ARIMA, wykorzystane obserwacje 2001:02-2009:09 (N = 104)  
 Wykorzystaj X-12-ARIMA (właściwa ML)  
 Zmienna zależna: (1-L) zp

	współczynnik	błąd standardowy	t-Studenta	wartość p	
const	-0,164158	0,268065	-0,6124	0,5403	
phi_1	0,260792	0,0959488	2,718	0,0066	***
Phi_1	0,536197	0,0802123	6,685	2,31e-011	***
Średn. aryt. zm. zależnej	-0,043923	Odch. stand. zm. zależnej	1,310253		
Średnia zaburzeń los.	0,054997	Odch. st. zaburzeń los.	1,057715		
Logarytm wiarygodności	-155,4743	Kryt. inform. Akaike'a	318,9486		
Kryt. bayes. Schwarz	329,5262	Kryt. Hannana-Quinna	323,2339		

## Model 6. Wyniki estymacji modelu ARIMAX przeciętnego zatrudnienia w sektorze przedsiębiorstw.

Dodatkowa zmienna egzogeniczna: zróżnicowany szereg wskaźnika prognostycznego nastrojów gospodarstw domowych (dbgp\_4) opóźniony o 4 miesiące

Estymacja ARMAX, wykorzystane obserwacje 2002:02-2009:09 (N = 92)  
 Wykorzystaj X-12-ARIMA (właściwa ML)  
 Zmienna zależna: (1-L) zp

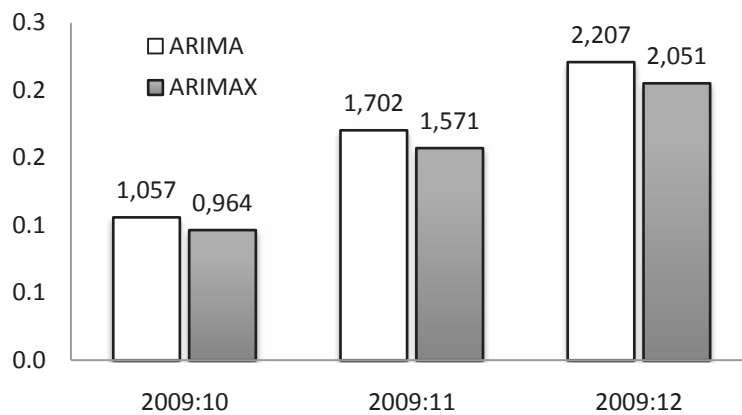
	współczynnik	błąd standardowy	t-Studenta	wartość p	
const	0,0202775	0,211018	0,09609	0,9234	
phi_1	0,285238	0,102216	2,791	0,0053	***
Phi_1	0,383575	0,0973059	3,942	8,08e-05	***
d_bgp_4	-0,0299792	0,0113342	-2,645	0,0082	***
Średn. aryt. zm. zależnej	0,092587	Odch. stand. zm. zależnej	1,106707		
Średnia zaburzeń los.	0,024584	Odch. st. zaburzeń los.	0,964879		
Logarytm wiarygodności	-128,2504	Kryt. inform. Akaike'a	266,5008		
Kryt. bayes. Schwarz	279,1097	Kryt. Hannana-Quinna	271,5899		

Tab. 5. Miary dokładności prognoz *ex post* modeli ARIMA i ARIMAX przeciętnego zatrudnienia w sektorze przedsiębiorstw

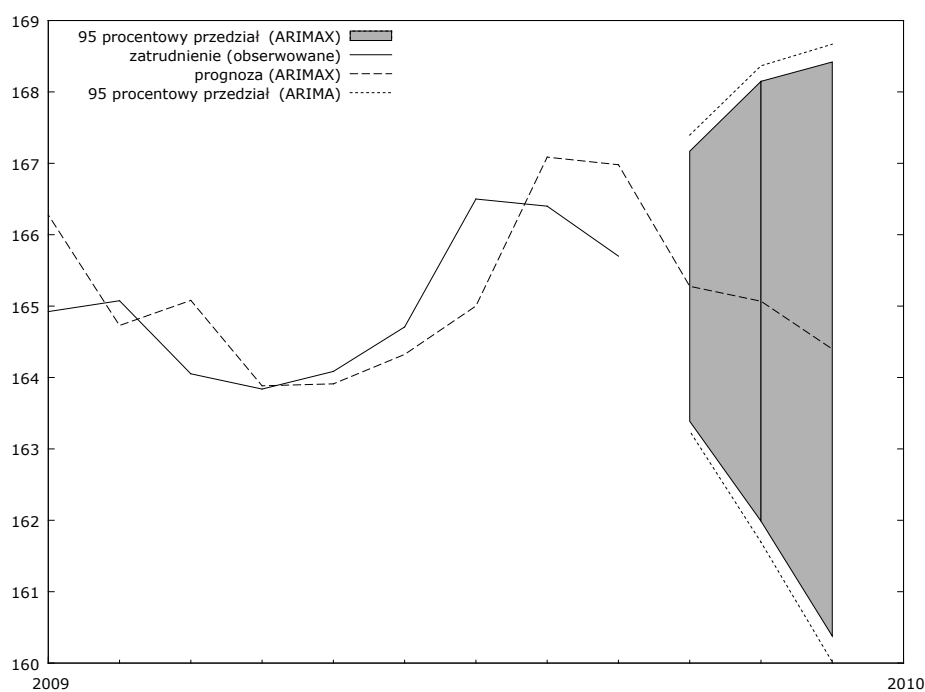
Miary dokładności prognoz <i>ex post</i>	Model ARIMA	Model ARIMAX
Średni błąd predykcji (ME)	0,054	0,024
Błąd średniokwadratowy (MSE)	1,118	0,930
Pierwiastek błędu średniokwadratowego (RMSE).	1,057	0,964
Średni błąd absolutny (MAE)	0,666	0,631
Średni błąd procentowy (MPE)	0,038	0,016
Średni absolutny błąd procentowy (MAPE)	0,425	0,407
Współczynnik Theila (w procentach) (U)	0,815	0,868

Tab. 6. Prognozy przeciętnego zatrudnienia w sektorze przedsiębiorstw z modeli ARIMA i ARIMAX

Kwartał	Prognoza	Błąd <i>ex ante</i>	95-procentowy przedział ufności
Model ARIMA			
2009:10	165,322	1,057	163,249–167,396
2009:11	165,029	1,702	161,693–168,365
2009:12	164,342	2,207	160,016–168,668
Model ARIMAX			
2009:10	165,278	0,964	163,386–167,169
2009:11	165,068	1,571	161,989–168,148
2009:12	164,399	2,051	160,378–168,419

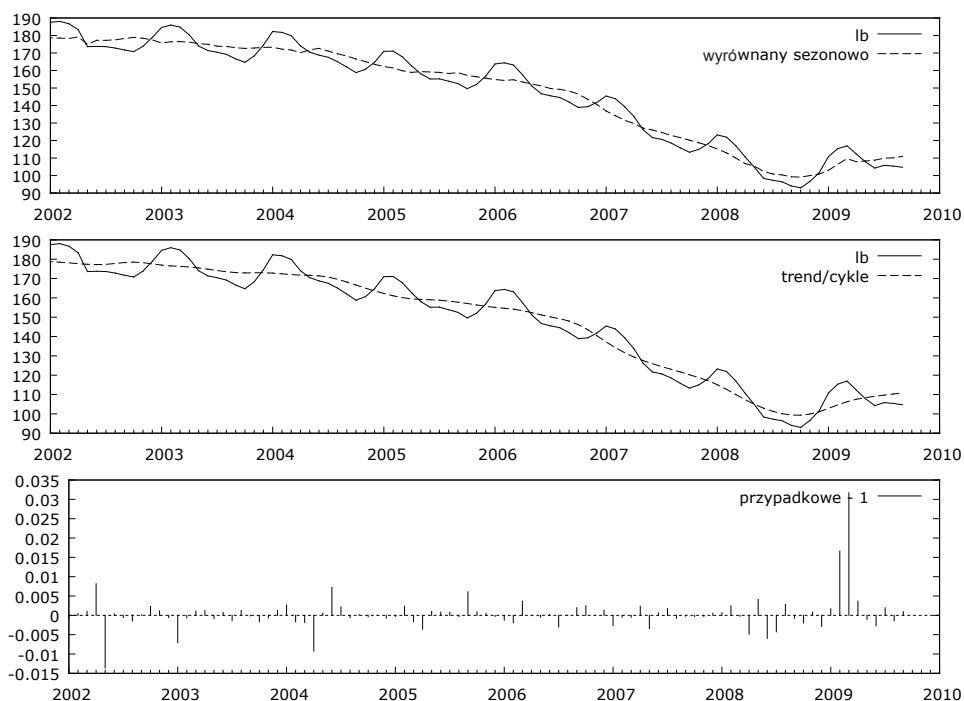


Rys. 9. Błędy *ex ante* prognoz przeciętnego zatrudnienia w sektorze przedsiębiorstw dla modeli ARIMA i ARIMAX



Rys. 10. Prognoza przedziałowa przeciętnego zatrudnienia w sektorze przedsiębiorstw z modeli ARIMA i ARIMAX

## 2.2.2. Liczba zarejestrowanych bezrobotnych



Rys. 11. Dekompozycja szeregu liczby zarejestrowanych bezrobotnych

### Model 7. Wyniki estymacji modelu ARIMA liczby zarejestrowanych bezrobotnych

Estymacja ARIMA, wykorzystane obserwacje 2003:02-2009:09 (N = 80)  
 Wykorzystaj X-12-ARIMA (właściwa ML)  
 Zmienna zależna: (1-L)(1-Ls) lb

	współczynnik	błąd standardowy	t-Studenta	wartość p
const	0,0691739	0,309546	0,2235	0,8232
phi_1	0,874375	0,0888332	9,843	7,36e-023 ***
theta_1	-0,532752	0,151458	-3,518	0,0004 ***
Theta_1	-0,511974	0,0922037	-5,553	2,81e-08 ***

Średn. aryt. zm. zależnej 0,170300    Odch. stand. zm. zależnej 1,814421  
 Średnia zaburzeń los. 0,010649    Odch. st. zaburzeń los. 1,392581  
 Logarytm wiarygodności -141,9868    Kryt. inform. Akaike'a 293,9736  
 Kryt. bayes. Schwarz 305,8837    Kryt. Hannana-Quinna 298,7487

### Model 8. Wyniki estymacji modelu ARIMAX liczby zarejestrowanych bezrobotnych. Dodatkowa zmienna egzogeniczna: zróżnicowany szereg wskaźnika prognostycznego nastrojów gospodarstw domowych opóźniony o 7 (d\_bgp\_7) i 8 (d\_bgp\_8) miesięcy

Estymacja ARMAX, wykorzystane obserwacje 2003:06-2009:09 (N = 76)  
 Wykorzystaj X-12-ARIMA (właściwa ML)  
 Zmienna zależna: (1-L)(1-Ls) lb

	współczynnik	błąd standardowy	t-Studenta	wartość p
const	-0,0545888	0,331075	-0,1649	0,8690
phi_1	0,866456	0,0717887	12,07	1,53e-033 ***
theta_1	-0,342734	0,133451	-2,568	0,0102 **
Theta_1	-0,549156	0,115223	-4,766	1,88e-06 ***
d_bgp_7	-0,0318225	0,0151249	-2,104	0,0354 **
d_bgp_8	-0,0439637	0,0151185	-2,908	0,0036 ***

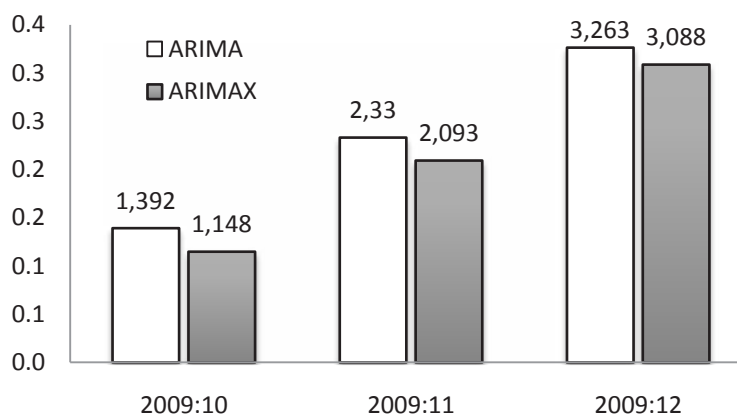
Średn. aryt. zm. zależnej 0,134724    Odch. stand. zm. zależnej 1,814034  
 Średnia zaburzeń los. 0,102493    Odch. st. zaburzeń los. 1,148591  
 Logarytm wiarygodności -120,8218    Kryt. inform. Akaike'a 255,6437  
 Kryt. bayes. Schwarz 271,9588    Kryt. Hannana-Quinna 262,1640

Tab. 7. Miary dokładności prognoz *ex post* modeli ARIMA i ARIMAX liczby zarejestrowanych bezrobotnych

Miary dokładności prognoz <i>ex post</i>	Model ARIMA	Model ARIMAX
Średni błąd predykcji (ME)	0,010	0,102
Błąd średniokwadratowy (MSE)	1,781	1,229
Pierwiastek błędu średniokwadratowego (RMSE)	1,334	1,108
Średni błąd absolutny (MAE)	1,037	0,854
Średni błąd procentowy (MPE)	0,039	0,097
Średni absolutny błąd procentowy (MAPE)	0,758	0,662
Współczynnik Theila (w procentach) (U)	0,348	0,315

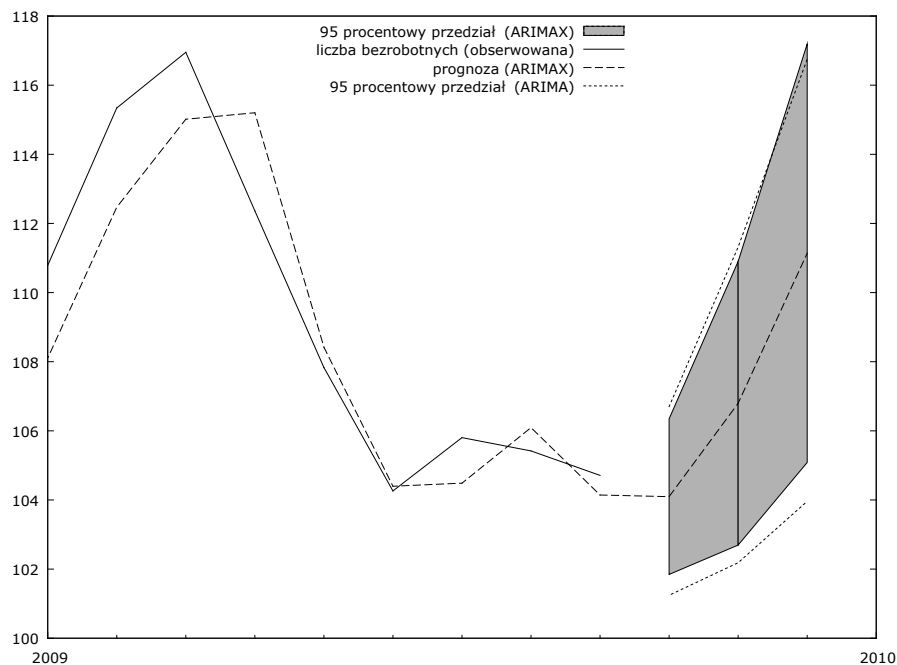
Tab. 8. Prognozy liczby zarejestrowanych bezrobotnych z modeli ARIMA i ARIMAX

Kwartał	Prognoza	Błąd <i>ex ante</i>	95-procentowy przedział ufności
Model ARIMA			
2009:10	103,972	1,392	101,243–106,702
2009:11	106,751	2,330	102,184–111,318
2009:12	110,356	3,263	103,960–116,751
Model ARIMAX			
2009:10	104,096	1,148	101,845–106,348
2009:11	106,798	2,093	102,695–110,900
2009:12	111,139	3,088	105,085–117,193



Rys. 12. Błędy *ex ante* prognoz liczby zarejestrowanych bezrobotnych dla modeli ARIMA i ARIMAX

Wprowadzenie do modeli ARIMA szacowanych na podstawie danych miesięcznych dodatkowej zmiennej opisującej zmiany nastrojów gospodarczych mieszkańców woj. lubelskiego również poprawia własności prognostyczne tychże modeli. Zmniejszyły się zarówno błędy *ex post*, jak i błędy *ex ante*, dla generowanych prognoz (por. tab. 5–8). Pociąga to za sobą zwężenie przedziałów ufności dla prognoz stawianych na kolejne trzy miesiące. Tym razem jednak spadek wielkości błędów jest bardzo mały. Przyczyną takiego stanu rzeczy jest zapewne znacznie lepsze dopasowanie „czystego” modelu ARIMA do danych miesięcznych oraz fakt, że liczba i częstotliwość obserwacji dodatkowo wprowadzanych zmiennych dotyczących kwartalnych badań nastrojów gospodarczych została dopasowana do miesięcznych obserwacji liczby bezrobotnych i pracujących w sektorze przedsiębiorstw.



Rys. 13. Prognoza przedziałowa liczby zarejestrowanych bezrobotnych z modeli ARIMA i ARIMAX

### 3. Weryfikacja i modele ze sztucznymi zmiennymi losowymi

Jak pokazano wyżej, w modelach ARIMAX wzrasta dokładność prognozy przedziałowej – przedziały prognozy są zazwyczaj mniejsze, co widać wyraźnie na rys. 3, 10 i 13. W tab. 9 podano informacje, o ile procent przedziały prognoz z modeli ARIMAX są węższe niż odpowiednie przedziały prognoz z modeli ARIMA.

Tab. 9. Szerokość przedziałów prognoz oraz procentowa wartość ich zmniejszenia w modelach ARIMAX

Model	Dane kwartalne			Dane miesięczne		
	ARIMA	ARIMAX	Zmiana	ARIMA	ARIMAX	Zmiana
Model dla przeciętnego zatrudnienia	8,0	5,8	26%	4,1	3,8	10%
	11,3	8,3	26%	6,7	6,2	8%
	13,8	10,1	26%	8,7	8,0	8%
Model dla liczby bezrobotnych	14,3	14,5	1%*	5,5	4,5	21%
	25,9	27,2	5%*	9,1	8,2	11%
	36,3	39,2	8%*	12,8	12,1	6%

\* Przedział prognozy w modelu ARIMAX w porównaniu z modelem ARIMA był **szerszy** o wskazany procent

W celu sprawdzenia, czy wprowadzenie dodatkowych zmiennych do modeli ARIMA statystycznie istotnie poprawia ich własności prognostyczne, przeprowadzono test istotności różnic dla błędów MAPE. W tab. 10 zestawiono poziomy istotności testu różnic średnich dla błędów względnych *ex post* z odpowiednich modeli ARIMA i ARIMAX. Ponieważ w przeprowadzonym teście weryfikowano hipotezę, że średni błąd względny z modelu ARIMA jest większy niż średni błąd względny z modelu ARIMAX, możemy go uważać za test sprawdzający, czy błąd MAPE z pierwszego modelu jest istotnie większy niż błąd MAPE z modelu drugiego.

Tab. 10. Wartości poziomów istotności  $p$  dla testu różnic średnich błędów w modelu ARIMA i ARIMAX

Model ARIMA		Dane kwartalne		Dane miesięczne	
		ARIMAX	ARIMA	ARIMAX	
Model dla przeciętnego zatrudnienia	MAPE	0,993	0,715	0,425	0,407
	$p$	0,10		0,40	
Model dla liczby bezrobotnych	MAPE	1,913	1,942	0,758	0,662
	$p$	0,48		0,17	

Z przeprowadzonego testu wynika, że różnica pomiędzy wartościami błędów MAPE w odpowiadających sobie modelach ARIMA i ARIMAX jest nieistotna statystycznie.

Wykonano również test istotności różnic wariancji reszt z odpowiadających sobie modeli. Poziomy istotności są w tym wypadku wyższe. Dla modeli przeciętnego zatrudnienia (dane kwartalne) wariancja reszt jest istotnie mniejsza w modelu ARIMAX. Dla modelu liczby bezrobotnych (dane miesięczne) poziom istotności statystyki testowej wyniósł 0,05, możemy więc uznać, że w tym wypadku spadek wariancji jest również istotny statystycznie. W pozostałych dwu modelach ARIMAX wariancja reszt nie zmniejszyła się istotnie, jeśli przyjmujemy standardowy poziom istotności 0,05.

Tab. 11. Wyniki testu różnic wariancji reszt dla par modeli ARIMA i ARIMAX

Model ARIMA		Dane kwartalne		Dane miesięczne	
		ARIMAX	ARIMA	ARIMAX	
Model dla przeciętnego zatrudnienia	wariancja	5,58	2,05	1,13	0,94
	$p$	< 0,01		0,19	
Model dla liczby bezrobotnych	wariancja	13,71	14,12	1,80	1,23
	$p$	0,45		0,05	

Powstaje zatem pytanie, czy dodawanie do modelu ARIMA dodatkowych zmiennych egzogenicznych ma sens oraz czy ich istotność w modelu nie jest wynikiem przypadku.

Odpowiedź można uzyskać, przeprowadzając symulację. Dla każdego z czterech modeli ARIMA wygenerowano 10 tys. szeregów czasowych. Wartości tych szeregów były generowane losowo na podstawie średnich i odchyłeń standardowych takich, jakie posiadały wskaźniki nastrojów gospodarczych w odpowiednich modelach ARIMAX. Następnie wprowadzano te szeregi jako dodatkowe zmienne egzogeniczne do modeli ARIMA, estymowano parametry uzyskanych w ten sposób równań i weryfikowano, czy parametry te są istotne statystycznie na poziomie 0,05 – jeśli tak było, uznawano równanie modelu za akceptowalne i zapisywano wartości MAPE, AIC, BIC i HQC dla danego równania. Wyniki tego eksperymentu przedstawiono w tab. 12 i 13. W nawiasach podano wartości odpowiednich wskaźników z czystych modeli ARIMA oraz poziomy istotności testu sprawdzającego, czy średnia wartość tych wskaźników z modeli testowych jest mniejsza niż wartość tychże wskaźników z „czystych” modeli ARIMA. Dodatkowo, ponieważ rozkłady są niesymetryczne, w tabeli podano wartość dominanty<sup>16</sup> (D) dla tych rozkładów.

<sup>16</sup> Dominanta została obliczona jako maksymalna wartość funkcji gęstości.

Tab. 12. Wyniki symulacji Monte Carlo: średnie i dominanty z zaakceptowanych modeli testowych

Model	Liczba zaakceptowanych modeli	Średnia wartość MAPE	Średnia wartość AIC	Średnia wartość BIC	Średnia wartość HQC
Zatrudnienie (kwartalne)	475	0,954 (0,993; < 0,01) D = 0,958	149,50 (151,28; < 0,01) D = 150,70	155,61 (154,33; > 0,99) D = 156,81	151,59 (152,32; < 0,01) D = 152,78
Bezrobotni (kwartalnie)	952	1,829 (1,913; < 0,01) D = 1,852	230,12 (232,21; < 0,01) D = 231,92	237,07 (235,68; > 0,99) D = 238,87	232,67 (233,48; < 0,01) D = 234,47
Zatrudnienie (miesięczne)	68	0,441 (0,425; > 0,99) D = 0,442	298,63 (318,95; < 0,01) D = 299,09	311,45 (329,53; < 0,01) D = 311,91	303,81 (323,23; < 0,01) D = 304,27
Bezrobotni (miesięcznie)	658	0,741 (0,758; < 0,01) D = 0,742	290,51 (293,97; < 0,01) D = 291,82	304,81 (305,88; < 0,01) D = 306,12	296,24 (298,75; < 0,01) D = 297,55

Tab. 13. Wyniki symulacji Monte Carlo: dominanty z odrzuconych modeli testowych

Model	MAPE	AIC	BIC	HQC
Zatrudnienie (kwartalne)	0,998	154,84	160,95	156,92
Bezrobotni (kwartalnie)	1,915	236,09	243,04	238,64
Zatrudnienie (miesięczne)	0,446	303,00	315,83	308,19
Bezrobotni (miesięcznie)	0,758	295,96	310,26	301,69

Z przeprowadzonego eksperymentu wynika, że dla modeli budowanych na danych kwartalnych odsetek modeli, które spełniałyby warunek istotności wszystkich parametrów, nie przekracza 7%, zaś dla modeli estymowanych na danych miesięcznych – nie przekracza 4%. Możemy więc przyjąć, że pojawienie się przypadkowej (i stąd pozornej) zależności prognozowanych zmiennych z wartościami indeksu nastrojów gospodarczych mieści się w granicach błędu statystycznego. Ponadto wiadomo, że wskaźniki nastrojów gospodarczych w woj. lubelskim są istotnie skorelowane ze zmiennymi charakteryzującymi gospodarkę województwa i mają własności wyprzedzające zmiany w gospodarce regionu (wyprzedzenie to wynosi z reguły od 3 do 5 kwartałów) [Bielak 2010].

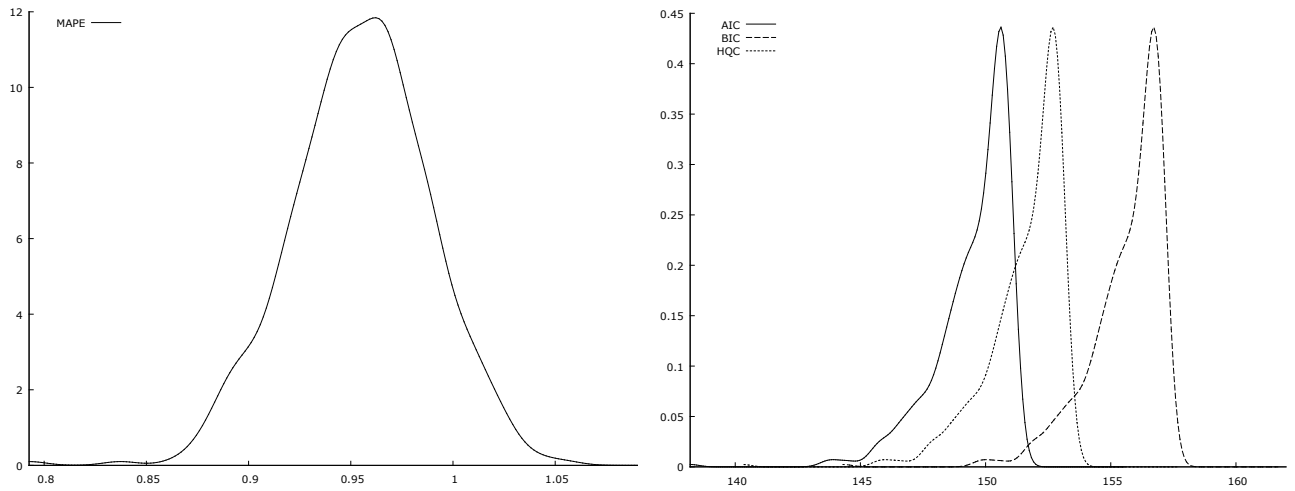
Wyniki symulacji dotyczące błędu MAPE są niejednoznaczne. Dla zatrudnienia (w ujęciu kwartalnym) błąd MAPE zmniejszył się; dla liczby bezrobotnych (w ujęciu kwartalnym i miesięcznym) – zmniejszył się; dla zatrudnienia w ujęciu miesięcznym – zwiększył się. Zmiany te są statystycznie istotne na poziomie co najmniej 0,01. Na rys. 14–17 przedstawiono rozkłady<sup>17</sup> błędów MAPE. Są one symetryczne i (oprócz modeli liczby bezrobotnych w ujęciu miesięcznym) praktycznie w całości są położone po lewej lub prawej stronie wartości błędu MAPE z „czystego” modelu ARIMA.

Średnie wartości wskaźników pojemności informacyjnej we wszystkich zaakceptowanych równaniach (oprócz BIC dla równań modeli kwartalnych) były niższe niż w „czystych” modelach ARIMA. Ich rozkłady charakteryzują się ponadto lewostronną asymetrią, co oznacza, że wśród równań testowych znalazły się równania o znacznie niższej wartości tych wskaźników niż średnia i dominanta (por. rys. 14–17). Równania te zatem pod względem kryteriów informacyjnych zostałyby uznane za lepsze.

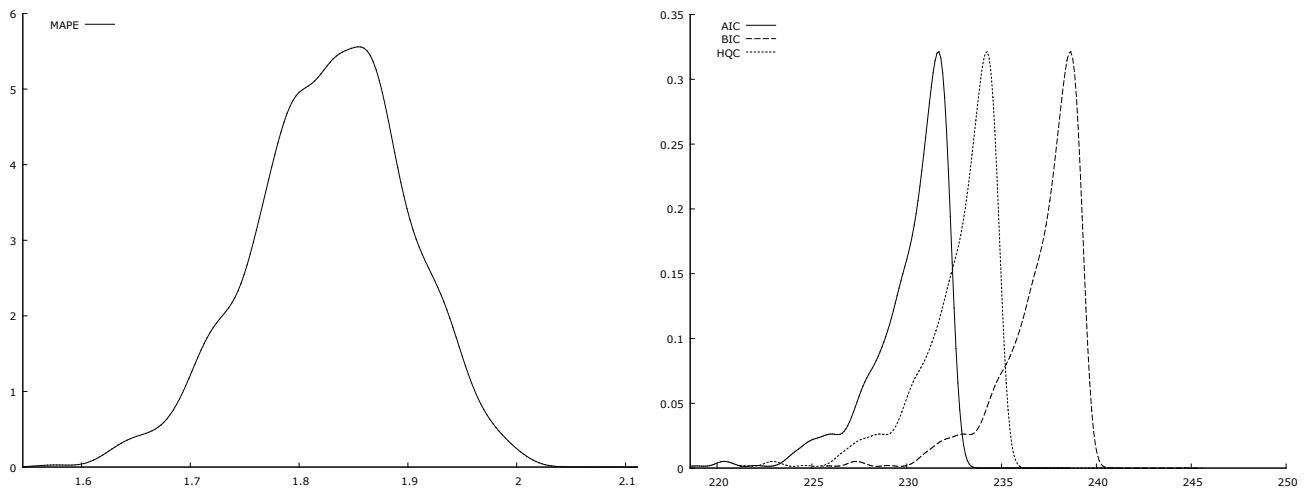
Informacje o równaniach odrzuconych, w których wprowadzone losowe zmienne okazały się nieistotne statystycznie, zawarto w tab. 13. Dominujące wartości błędów MAPE dla tych równań są wyższe (równe dla równań modelu bezrobotnych w ujęciu miesięcznym) od błędów MAPE z odpowiednich „czystych” modeli ARIMA. Wskaźniki pojemności informacyjnej w tychże równaniach były tym razem wyższe niż w modelach ARIMA (z wyjątkiem równań modelu zatrudnienia w ujęciu miesięcznym).

<sup>17</sup> Dokładniej mówiąc, są to wykresy funkcji gęstości uzyskane z wykorzystaniem jądra Gaussa.

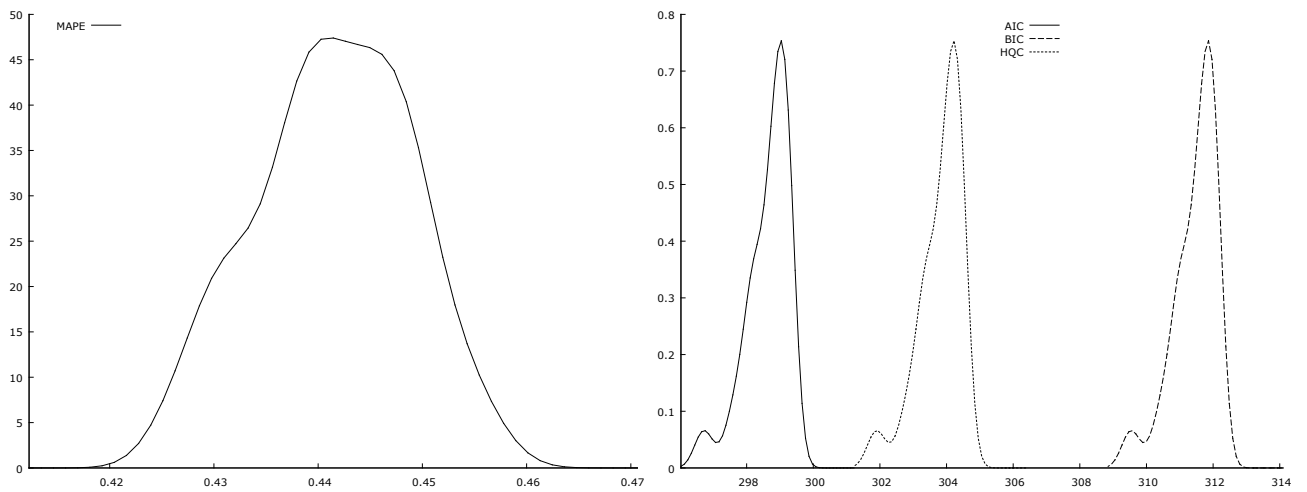




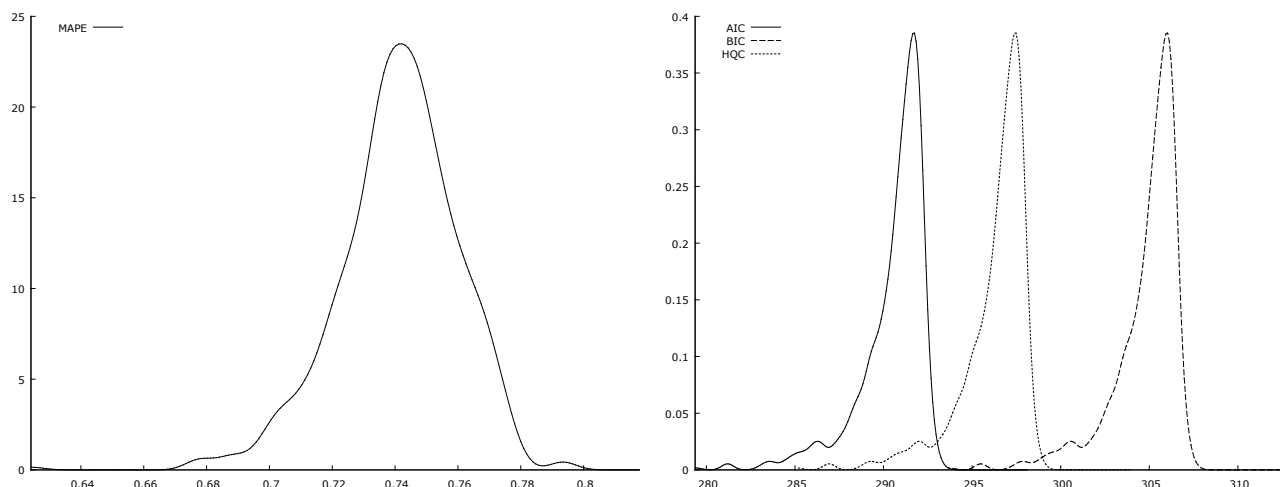
Rys. 14. Estymacja funkcji gęstości (jądro Gaussa) MAPE oraz AIC, BIC i HQC dla zaakceptowanych modeli testowych (zatrudnienie – kwartalne)



Rys. 15. Estymacja funkcji gęstości (jądro Gaussa) MAPE oraz AIC, BIC i HQC dla zaakceptowanych modeli testowych (liczba bezrobotnych – kwartalne)



Rys. 16. Estymacja funkcji gęstości (jądro Gaussa) MAPE oraz AIC, BIC i HQC dla zaakceptowanych modeli testowych (zatrudnienie – miesięczne)



Rys. 17. Estymacja funkcji gęstości (jądro Gaussa) MAPE oraz AIC, BIC i HQC dla zaakceptowanych modeli testowych (liczba bezrobotnych – miesięczne)

## Wnioski

Dodanie do „czystych” modeli ARIMA dodatkowych zmiennych egzogenicznych – wskaźników nastrojów gospodarczych z badań ankietowych – może poprawić jakość modeli pod względem tak wielkości błędów prognoz, jak i wartości kryteriów informacyjnych.

Poprawa wyżej wymienionych parametrów nie jest duża i jak pokazano, jest nieistotna statystycznie, niemniej jednak wprowadzenie dodatkowej zmiennej pochodzącej z badań koniunktury wydaje się uzasadnione z uwagi na fakt stosunkowo dużej korelacji otrzymywanych z tych badań szeregów ze zmianami w gospodarce województwa oraz ich własności wyprzedzające. Dodatkowa zmienna może ponadto wprowadzać do prognoz korekty (jak w modelu zatrudnienia w ujęciu kwartalnym).

Możliwość uzyskania podobnej poprawy własności prognostycznych modelu wynikającej z przypadkowego (ale istotnego statystycznie) związku między zmienną prognozowaną a dodatkową zmienną egzogeniczną nie przekracza (dla wszystkich modeli testowych<sup>18</sup>) 6%.

W modelach ARIMAX wzrasta dokładność prognozy przedziałowej; w zaprezentowanych modelach szerokość przedziału prognozy zmniejszyła się średnio (dla wszystkich modeli testowych<sup>19</sup>) o 10,66%.

W wypadku otrzymania modelu ARIMAX, który ma lepsze własności prognostyczne od czystego modelu ARIMA, poprawa własności prognostycznych jest większa w modelach dla danych kwartalnych niż w modelach dla danych miesięcznych, a zatem można przyjąć, że wprowadzone do modelu dodatkowe zmienne egzogeniczne niejako „uzupełniają” model oparty na danych kwartalnych o pewne dane, których obserwacje notowane z częstotliwością kwartalną nie mogą wychwycić.

## Literatura

- BIELAK J. (2010): *Prognoza wybranych wskaźników rozwoju gospodarczego województwa lubelskiego na I i II kwartał 2010 roku*, [w:] „Lubelski Barometr Gospodarczy. Raporty”, nr 3.
- BROCKWELL P.J., DAVIS R.A. (2002): *Introduction to Time Series and Forecasting*, Springer, New York.
- COTTRELL A., LUCCHETTI R. (2010): *Gretl User's Guide. Gnu Regression, Econometrics and Time-series Library*, March.
- DROZDOWICZ-BIEĆ M., PATER R., WARGACKI M. (2008): *Using Survey Data for Labor Market Leading Index*, [w:] *Polish Contribution to 28<sup>th</sup> CIRET Conference*, Warsaw School of Economics, Warsaw.
- KOWERSKI M., BIELAK J. (2006): *Barometr nastrojów gospodarczych jako wskaźnik jakościowy rozwoju regionalnego. Przykład województwa lubelskiego*, [w:] A.F. Bocian (red.), *Rozwój regionalny a rozwój społeczny*, Wyd. Uniwersytetu w Białymstoku, Białystok.
- REKOWSKI M. (2003): *Wskaźniki wyprzedzające w prognozowaniu cykli gospodarczych*, [w:] M. Rekowski (red.), *Wskaźniki wyprzedzające jako metoda prognozowania koniunktury w Polsce*. Wyd. AE, Poznań.
- U. S. CENSUS BUREAU (2002): *X-12-ARIMA. Reference Manual. Version 0.2.10*, Washington.
- WEISANG G., AVAZU Y. (2008): *Vagaries of the Euro: An Introduction to ARIMA Modeling*, [w:] „Case Studies in Business, Industry and Government Statistics”, Vol. 2, Issue 1, Bentley University, Waltham.

<sup>18</sup>  $(0,0475 + 0,0952 + 0,0068 + 0,0658)/4$ .

<sup>19</sup>  $(26 + 26 + 26 + 10 + 8 + 8 + 21 + 11 + 6 - 1 - 5 - 8)/12$ .