

Jacek M. Czerniak*

Uniwersytet Kazimierza Wielkiego w Bydgoszczy

<https://orcid.org/0000-0001-9848-7192>

Andrzej Żak**

Akademia Marynarki Wojennej w Gdyni

<https://orcid.org/0000-0002-0364-4077>

Beata Marciniak***

Politechnika Bydgoska im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich

<https://orcid.org/0000-0003-1092-1279>

MODEL WEKTOROWYCH SKIEROWANYCH LICZB ROZMYTYCH (vOFN)

Streszczenie

Autorzy postawili sobie w artykule zadanie przededefiniowanie rachunku Ordered Fuzzy Numbers wprowadzonego przez Witolda Kosińskiego. Przyczynkiem do zamieszczonych rozważań była ostatnia dekada badań, podczas której autorzy często musieli odpierać zarzuty kierowane przez niektórych badaczy wobec tego systemu obliczeń na liczbach rozmytych. W artykule przededefiniowano zatem sama liczbę OFN z podejścia funkcyjnego na podejście wektorowe tworząc vOFN (Vectorial Ordered Fuzzy Numbers). Autorzy przedstawili rozwiązanie problemu tzw. niewłaściwych liczb OFN, czyli liczb o niewypukłych kształtach. Rozwiązali nierozwiązany przez Kosińskiego problem porównywania liczb OFN. Zniwelowali również niezrozumiałą

* Jacek M. Czerniak – doktor habilitowany inżynier, profesor UKW, Katedra Systemów Inteligentnych, Wydział Informatyki, Uniwersytet Kazimierza Wielkiego w Bydgoszcz, e-mail: jczerniak@ukw.edu.pl

** Andrzej Żak – doktor habilitowany inżynier, profesor AMW, Katedra Informatyki, Wydział Mechaniczno-Elektryczny, Akademii Marynarki Wojennej w Gdyni, email: a.zak@amw.gdynia.pl

*** Beata Marciniak – doktor inżynier, Zakład Informatyki Stosowanej i Inżynierii Systemów, Wydział Telekomunikacji, Informatyki i Elektrotechniki, Politechnika Bydgoska im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich, email: beata.marciniak@pbs.edu.pl

dla wielu badaczy cechę przyrastania stopnia wielomianów funkcji zbroczy narastających i opadających, jaki miał miejsce podczas wykonywania działań iloczynu i ilorazu liczb OFN, co skutkowało krzywoliniowymi wykresami funkcji tych zbroczy. Dzięki redefinicji wszystkie pozytywne właściwości OFN zostają zachowane, a niedogodności zniwelowane. Autorzy wyrażają przekonanie, że dzięki podejściu vOFN arytmetyka ta znajdzie jeszcze więcej zastosowań jako prosta, niezawodna, jednoznaczna i niezwykle łatwa w implementacji.

Słowa kluczowe: *logika rozmyta, liczby rozmyte, OFN, vOFN*

VECTORIAL MODEL OF ORDERED FUZZY NUMBERS (vOFN)

Abstract

In the article, the authors set themselves the task of redefining the Ordered Fuzzy Numbers calculus introduced by Witold Kosiński. The last decade of research contributed to the presented considerations. during which the authors often had to refute the accusations made by some researchers against this system of calculations on fuzzy numbers. Therefore, the article redefined the number of OFNs from a functional approach to a vector approach, creating vOFN (Vectorial Ordered Fuzzy Numbers). The authors presented a solution to the so-called incorrect OFN numbers, i.e. numbers with non-convex shapes. They solved the problem of comparing OFN numbers unsolved by Kosiński. They also eliminated the feature, which is incomprehensible to many researchers, of the increase in the degree of the polynomial functions of the rising and falling edges, which took place when performing the operations of the product and quotient of OFN numbers, which resulted in curvilinear graphs of the functions of these edges. Thanks to the redefinition, all the positive properties of OFN are preserved and the disadvantages are eliminated. The authors believe that thanks to the vOFN approach, this arithmetic will find even more applications as it is simple, reliable, unambiguous and extremely easy to implement.

Keywords: *fuzzy logic, fuzzy sets, OFN, vOFN*

~ • ~

Wstęp

Wprowadzenie teorii zbiorów rozmytych przez Zadeha¹ spowodowało szybki rozwój jednej z najlepiej skomercjalizowanych dziedzin sztucznej inteligencji. W miarę rozwoju teorii, wielu autorów angażowało się w opracowywanie ary-

¹ L. Zadeh, *Outline of new approach to the analysis of complex systems and decision process*, "IEEE on Systems, Man and Cybernetics" 1973, SMC-3, 28-44.

metryki umożliwiającej operacje na liczbach rozmytych². Prawdopodobnie najbardziej znana z nich, ze względu na popularność jej autorów, jest arytmetyka LR zaproponowana przez Dubois'a i Prade'a³. Interesujące podejście, którym jest ograniczona arytmetyka rozmyta (CFA), można znaleźć w artykułach Klira⁴ oraz w artykule Chang'a i Hung'a⁵. Innym podejściem jest arytmetyka RMD zaproponowana przez Piegata i Plucińskiego⁶. Jednak najważniejszą z punktu widzenia niniejszego artykułu jest arytmetyka OFN zaprezentowana przez Kosińskiego⁷. Ta arytmetyka zdobyła wielu zwolenników ze względu na kompletność systemu obliczeniowego, który w terminologii algebraicznej jest pierścieniem. Jednakże pojawiły się również sceptyczne i czasami krytyczne opinie, które głównie podnosiły dwa zarzuty wobec tej arytmetyki. Jednym z nich były liczby niekonweksowe w OFN o kształtach trudnych do interpretacji przez badaczy przyzwyczajonych do klasycznego rachunku⁸. Drugi zarzut dotyczył krzywoliniowych charaktery-

² S. Abbasbandy, B. Asady, *Ranking of fuzzy numbers by sign distance*, "Inform. Sciences" 2006, 176, 2405-2416; B. Asady, A. Zendehnam, *Ranking fuzzy numbers by distance minimization*, "Applied Mathematical Modelling" 2007, 31, 2589-2598.; F. M. Adabitabar, G. Fath-Tabar, Z. Eslampia, *The similarity measure of generalized fuzzy numbers based on interval distance*, "Applied Mathematics Letters" 2012, 25(10), 1528-1534.

³ R. Bucko, T. Vince, J. Molnar, J. Dziak, A. Gladyr, *Safety system for intelligent building*, in: *International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES)*, IEEE 2017, pp. 252-255; J. Baumgart, B. Sangho, *A case study of the effectiveness of new methods of swarm optimization compared to known methods*, "Studies and Materials in Applied Computer Science" 2021, 13 (1), 47-50, ISSN 1689-6300.

⁴ J. Czerniak, D. Ewald, M. Macko, G. Smigielski, K. Tyszczyk, *Approach to the monitoring of energy consumption in eco-grinder based on abc optimization*, "Beyond Databases, Architectures And Structures, Bdas" 2015, 521, 516-529; J. M. Czerniak, *Ofn method based on tsp ant colony optimization*, in: Prokopowicz, P., Czerniak, J. M., Mikolajewski, D., Apiecionek, L., Slezak, D. (eds.) *Theory and Applications of Ordered Fuzzy Numbers. A Tribute to Professor Witold Kosinski*, chap. 12, "Studies in Fuzziness and Soft Computing" 2017, pp. 207-222; J. M. Czerniak, *Ordered fuzzy numbers applied in selected swarm optimization algorithms*, Bydgoszcz 2019.

⁵ C. Cheng, *A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method*, "Fuzzy Sets Syst." 1998 (95), 307-317.

⁶ A. Piegat, M. Plucinski, *Computing with words with the use of inverse rdm models of membership functions*, "International Journal of Applied Mathematics and Computer Science" 2015, 25 (3), 675-688.

⁷ B. Dorohonceanu, B. Marin, *A simple method for comparing fuzzy numbers*, 2002; K. Dyczkowski, *A less cumulative algorithm of mining linguistic browsing patterns in the world wide web*, 2007; D. Ewald, J. Czerniak, H. Zarzycki, *Ofnbee method used for solving a set of benchmarks*, in: Kacprzyk, J. e.a. (ed.) *Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017. IWIFSGN 2017, EUSFLAT 2017, "Advances in Intelligent Systems and Computing"* 2018, vol. 642, pp. 24-35; W. Dobrosielski, J. Czerniak, J. Szczepanski, H. Zarzycki, *Two new defuzzification methods useful for different fuzzy arithmetics*, in: et al., A.K. (ed.) *Uncertainty and Imprecision in Decision Making and Decision Support: Cross-Fertilization, New Models and Applications. IWIFSGN 2016, "Advances in Intelligent Systems and Computing"* 2018, vol. 559, pp. 83-101.

⁸ J. Kacprzyk, A. Wilbik, *Using fuzzy linguistic summaries for the comparison of time series:*

styk krawędzi wzrostu i spadku w operacjach mnożenia i dzielenia. Zjawisko to wynikało ze zmiany stopnia funkcji wielomianowych opisujących krawędzie⁹. Kolejnym problemem napotkanym przez badaczy był problem porównywania OFN. Problem porównywania liczb rozmytych nie jest nowy i nie dotyczy tylko czy też głównie liczb w notacji OFN¹⁰. Badania w tej dziedzinie prowadzone są od 1977 roku przez Zadeha, Yagera i Kaufmana, oraz Chang'a i Amado¹¹. Z kolei w obecnym wieku Bortolan, Degani i Dadgostar dokonali przeglądu niektórych metod porównywania zbiorów rozmytych¹² gdzie zaproponowali spójną metodę zwana Metodą Częściowego Porównania (PCM)¹³. W kolejnych latach Wang i Kerre próbowali sformułować reguły i aksjomaty mające na celu uporządkowanie sposobów porównywania liczb rozmytych. Dzięki tym kryteriom autorom udało się dokonać systematycznego porównania szerokiej gamy metod rangowania liczb rozmytych¹⁴. W kolejnych latach opracowano nowe podejścia do problemu porównywania liczb rozmytych. Jednym z tych podejść było zaprezentowane w badaniu autorstwa Dobrosielskiego, Czerniaka i innych, którzy w 2018 r. zaproponowali¹⁵ wykorzystanie kilku oryginalnych operatorów

an application to the analysis of investment fund quotations, "IFSA/EUSFLAT Conf." 2009, pp. 1321-1326.

- ⁹ T. Hajjari, *A new improved method for comparing fuzzy numbers by centroid point*, "Journal of Mathematical Extension" 2016, 10 (2), 1-23; W. Guixiang, L. Jing, *Approximations of fuzzy numbers by step type fuzzy numbers*, "Fuzzy Sets and Systems" 2017, 310, 47-59; P. Jacko, D. Kovac, R. Bucko, T. Vince, O. Kravets, *The parallel data processing by nucleo board with stm32 microcontrollers*, in: *International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES)*, "MEES" 2017, pp. 264-267; K. Galas, *Drive unit as a replacement for the platform*, "Studies and Materials in Applied Computer Science" 2020, 12 (1), 10-14.
- ¹⁰ W. Kosinski, *On fuzzy number calculus*, "International Journal of Applied Mathematics and Computer Science" 2006, 16 (1), 51-57; W. Kosinski, *On soft computing and modeling. Image Processing Communication*, in: "International Journal with special section: Technologies of Data Transmission and Processing, held in 5th International Conference INTER-POR" 2006, 11 (1), 71-82; W. Kosinski, K. Frischmuth, D. Wilczynska-Sztyma, *A New Fuzzy Approach to Ordinary Differential Equations*, in: Rutkowski, L., Scherer, R., Tadeusiewicz, R., Zadeh, L.A., Żurada, J.M.(eds.) *Proceedings of ICAISC2010*, Part I, "Lecture Notes in Computer Science" 2010, vol. 6113, pp. 120-127.
- ¹¹ R. Yager, *A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval*, "Inform. Sciences" 1981, 24, 143-161; A. Marszałek, T. Burczynski, *Modeling and forecasting financial time series with ordered fuzzy candlesticks*, "Information Science" 2014, 273, 144-155.
- ¹² E. Szmidt, J. Kacprzyk, *Distances between intuitionistic fuzzy sets*, "Fuzzy Sets and Systems" 2000, 114, 505-518; L. Trana, L. Ducksteinb, *Comparison of fuzzy numbers using a fuzzy distance measure*, "Fuzzy Sets and Systems" 2002, 130, 331-341.
- ¹³ S. Zadrozny, J. Kacprzyk, *On the use of linguistic summaries for text categorization*, in: *Proceedings of IPMU*, 2004, pp. 1373-1380; H. Zarzycki, *Application of the finite difference method to value derivatives*, "Studies and Proceedings of Polish association for Knowledge Management" 2011, 42, 267-277.
- ¹⁴ Y. Wang, Y. Luo, *Area ranking of fuzzy numbers based on positive and negative ideal points*, "Comput. Math. Appl." 2009, 58, 1763-1779.
- ¹⁵ J. M. Czerniak, W.T. Dobrosielski, I. Filipowicz, *Comparing fuzzy numbers using defuzzifi-*

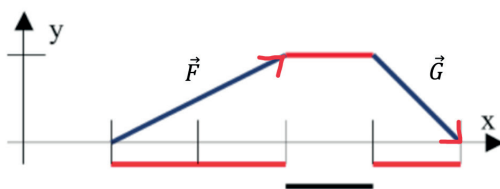
wyostrzania w procesie porównywania liczb rozmytych w notacji OFN¹⁶. Niniejszy artykuł przedstawia rozwiązania wyżej wymienionych problemów i rzekomych niedoskonałości kalkulacji OFN, poprzez wprowadzenie redefinicji tej arytmetyki określanej w kolejnym akapicie jako Wektorowe Skierowane Liczby Rozmyte.

1. Wektorowe Skierowane Liczby Rozmyte (vOFN)

W odniesieniu do definicji Skierowanych Liczb Rozmytych sformułowanej przez Kosińskiego¹⁷, Wektorowe Skierowane Liczby Rozmyte są zdefiniowane w następujący sposób.

Definicja 1. Wektorowa Skierowana Liczba Rozmyta

W ogólności, Wektorowe Skierowane Liczby Rozmyte przyjmują kształt trapezu o współrzędnych $A[a, b, c, d]$. Trapez ten jest utworzony przez uporządkowaną parę wektorów $\rightarrow F_A, \rightarrow G_A$. Wektory te posiadają następujące współrzędne: $\rightarrow F_A$ zaczyna się w punkcie $f_0(a, 0)$ i kończy w punkcie $f_1(b, 1)$, natomiast $\rightarrow G_A$ zaczyna się i kończy w punktach $g_1(c, 1)$, $g_0(d, 0)$ odpowiednio. Kierunek, zwrot oraz wartość obu wektorów bezpośrednio wywodzą się z prostej łączącej wspomniane punkty.



Rysunek 1. Liczba vOFN jako uporządkowana para wektorów

Liczbę vOFN definiuje się także w oparciu o funkcję przynależności liczby OFN.

cators on ofn shapes, in: Prokopowicz, P., Czerniak, J. M., Mikołajewski, D., Apiecionek, L., Slezak, D. (eds.) *Theory and Applications of Ordered Fuzzy Numbers. A Tribute to Professor Witold Kosinski*, "Studies in Fuzziness and Soft Computing" 2017, chap. 6, pp. 207-222; J.M. Czerniak, H. Zarzycki, *Artificial acari optimization as a new strategy for global optimization of multimodal functions*, "Journal of Computational Science" 2017; J. M. Czerniak, *Ordered fuzzy numbers applied in selected swarm optimization algorithms*, Bydgoszcz 2019.

¹⁶ J. M. Czerniak, H. Zarzycki, D. Ewald, *AAO as a new strategy in modeling and simulation of constructional problems optimization*, "Simulation Modelling Practice and Theory" 2017; J. M. Czerniak, H. Zarzycki, L. Apiecionek, W. Palczewski, P. Kardasz, *A cellular automata-based simulation tool for real fire accident prevention*, "Mathematical Problems in Engineering" 2018, 3058241, 1-12.

¹⁷ W. Kosinski, *On soft computing and modeling. Image Processing Communication*, "International Journal with special section: Technologies of Data Transmission and Processing, held in 5th International Conference INTER-POR" 2006, 11(1); W. Kosinski, *On fuzzy number calculus*, "International Journal of Applied Mathematics and Computer Science" 2006, 16 (1), 51-57.

Definicja 2. Funkcja przynależności liczby OFN

Funkcją przynależności skierowanej liczby rozmytej A nazywamy funkcję $\mu_A(x) : R \rightarrow [0, 1]$ określoną dla $x \in R$ następująco:

$$\begin{aligned} x \notin \text{supp}_A &\Rightarrow \mu_A(x) = 0 \\ x \in (1_A^-, 1_A^+) &\Rightarrow \mu_A(x) = 1 \\ x \in \text{supp}_A \wedge x \notin (1_A^-, 1_A^+) &\Rightarrow \mu_A(x) = \max(f_A^{-1}(x), g_A^{-1}(x)) \end{aligned} \quad (12)$$

Definicja 3.

Wektorowa Skierowana Liczba Rozmyta jest rozumiana jako trójka $A = (R, \mu_A, S_A)$, gdzie $\mu_A : R \rightarrow [0, 1]$ jest funkcją przynależności tej liczby, a $S_A \in \{-1, 0, 1\}$ oznacza porządek.

Graficzne przedstawienie skierowanej liczby rozmytej A jest parą $A = (C_A, S_A)$, gdzie S_A reprezentuje skierowanie, zaś $C_A \subseteq R^2$ jest krzywą funkcji przynależności μ zdefiniowaną następująco:

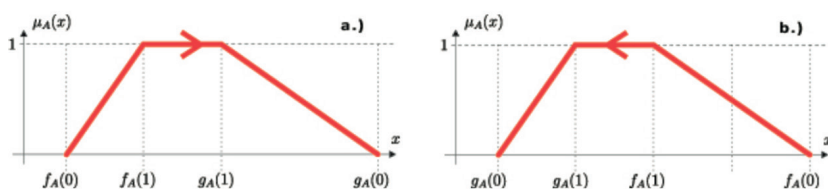
$$\forall_{\mu \in [0,1]} [C_A = (l_A, p_A) \times \{0\} \cup [1_A^-, 1_A^+] \times \{1\} \cup \vec{F}_A \cup \vec{F}_B] \quad (1)$$

dla $\rightarrow F_A$ i $\rightarrow G_A \subseteq R^2$ będących wektorami zboczy narastającego i opadającego odpowiednio.

Definicja 4. Pozytywne i negatywne skierowanie liczby¹⁸

Ze względu na swój porządek, liczby rozmyte można podzielić na dwie kategorie:

- vOFN o dodatnim porządku – kierunek porządku zbiega się z kierunkiem osi OX,
- vOFN o ujemnym porządku – kierunek porządku jest przeciwny do kierunku osi OX.

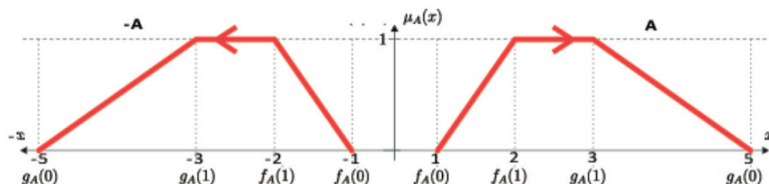


Rysunek 2. Liczba rozmyta skierowana a.) pozytywnie b.) negatywnie

¹⁸ W. Kosinski, P. Prokopowicz, D. Slezak, On algebraic operations on fuzzy numbers, in: Klopotek, M.A., Wierzchoń, S.T., Trojanowski, K. (eds.) *Intelligent Information Processing and Web Mining: Proceedings of the International IIS: IIPWM'03 Conference held in Zakopane, Poland, June 2-5, 2003*, pp. 353-362. Springer, Berlin, Heidelberg 2003.

Definicja 5. Liczba przeciwna vOFN.

Liczba przeciwna do liczby A jest oznaczana jako $-A$, i jest to liczba uzyskana poprzez odbicie lustrzane względem osi OY. Przeciwne liczby vOFN są zatem przeciwnym skierowaniem w stosunku do pierwowzoru.



Rysunek 3. Liczba vOFN A oraz liczba do niej przeciwna $-A$

Definicja 6. Odwrócenie skierowania liczby vOFN [21].

Odwrócenie skierowania liczby rozmytej A polega na zamianie kolejności pary wektorów zbocza narastającego (wektora $\rightarrow F_A$) oraz zbocza opadającego (wektora $\rightarrow G_A$). W efekcie uzyskiwana jest liczba B definiowana jako uporządkowana para wektorów $(\rightarrow F_B, \rightarrow G_B)$. Operacja ta jest zapisana następująco:

$$\forall_{\mu \in [0,1]} [B = A|^- \Leftrightarrow \vec{G}_B = \vec{F}_A \wedge \vec{F}_B = \vec{G}_A] \quad (2)$$

gdzie:

A to uporządkowana liczba rozmyta zdefiniowana przez parę wektorów $(\rightarrow F_A, \rightarrow G_A)$,

B to wynik operacji odwrócenia porządku vOFN,

$|^-$ to symbol odwrócenia porządku vOFN.

Liczba uzyskana zgodnie z powyższą definicją nazywana jest liczbą odwrotną vOFN lub liczbą z odwróconą orientacją (o przeciwnym skierowaniu).

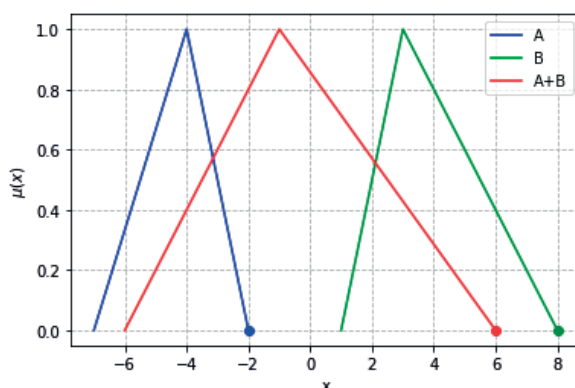
Definicja 7. Suma liczb vOFN [21][40][17][18]

Niech będą dane trzy uporządkowane liczby rozmyte $A = (\rightarrow F_A, \rightarrow G_A)$, $B = (\rightarrow F_B, \rightarrow G_B)$ i $C = (\rightarrow F_C, \rightarrow G_C)$.

Można powiedzieć, że C jest sumą oznaczoną jako $C = A + B$, jeśli

$$\forall_{\mu \in [0,1]} [\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{F}_C \wedge \vec{G}_A + \vec{G}_B = \vec{G}_C] \quad (3)$$

Operacja sumowania liczb vOFN o tych samych porządkach daje ten sam wynik co dla klasycznych wypukłych liczb rozmytych. Przykład obliczeniowy, którego wynik jest przedstawiony graficznie na poniższym rysunku, ma następującą postać.



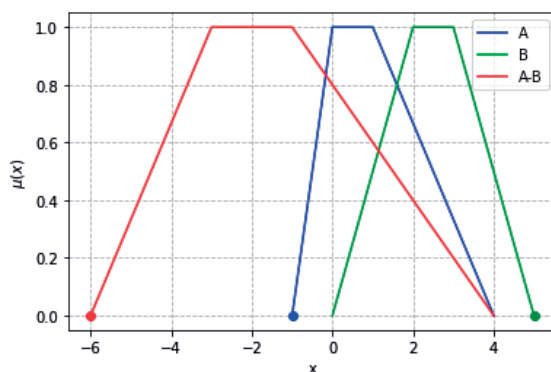
Rysunek 4. Suma $C=A+B$ liczb vOFN $A = [-2, -4, -4, -7]$ i $B = [8, 3, 3, 1]$ daje wynik $C = [6, 1, 1, 6]$

Definicja 8. Różnica liczb vOFN¹⁹

Niech będą dane trzy skierowane liczby rozmyte $A = (\rightarrow F_A, \rightarrow G_A)$, $B = (\rightarrow F_B, \rightarrow G_B)$ i $C = (\rightarrow F_C, \rightarrow G_C)$. Mówimy, że C jest wynikiem odejmowania B od A zapisywanym wzorem $C = A - B$, jeśli

$$\forall_{\mu \in [0,1]} [\vec{F}_A - \vec{F}_B = \vec{F}_C \wedge \vec{G}_A - \vec{G}_B = \vec{G}_C] \quad (4)$$

Odejmowanie w sensie OFN jest zatem trywialnym dodawaniem do odjemnej liczby przeciwnej do odjemnika $A - B = A + (-B)$. Orientacja liczby OFN wskazuje położenie części rosnącej krzywej przynależności F_A względem części malejącej liczby rozmytej G_A .



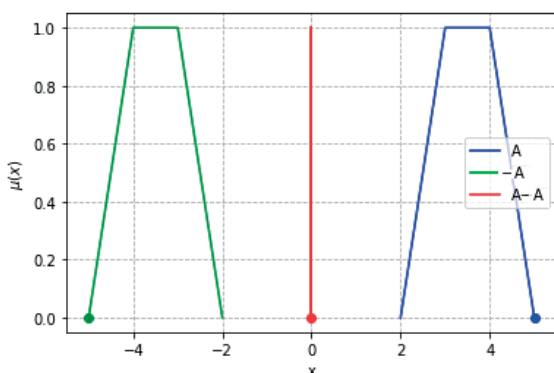
Rysunek 5. Różnica $C=A-B$ liczb vOFN $A = [-1, 0, 1, 4]$ i $B = [5, 3, 2, 0]$ daje wynik $C = [-6, -3, -1, 4]$

¹⁹ W. Kosinski, P. Slys, *Fuzzy Numbers and Their Quotient Space with Algebraic Operations*, "Bulletin of Polish Academy of Sciences: Mathematics" 1993, 41(3), 285-295.

Definicja 9. Element neutralny sumy i różnicy liczb vOFN [21][40]

Wynikiem odejmowania $A - A$ jest liczba rzeczywista $r = 0$. Liczba rzeczywista $r \in R$ jest reprezentowana przez parę $(\rightarrow F_A, \rightarrow G_A)$, przy czym:

$$\forall_{\mu \in [0,1]} [\vec{F}_r = \vec{G}_r = r] \quad (5)$$

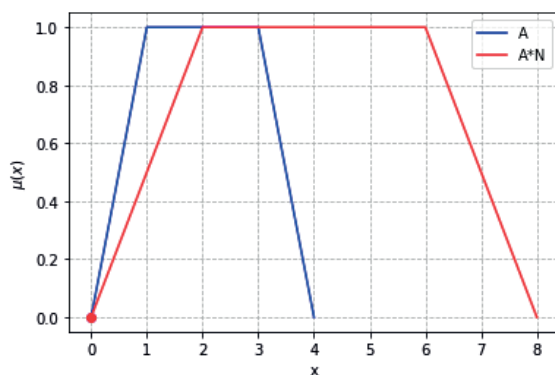


Rysunek 6. Element neutralny $[0,0,0,0]$ jako wynik działania $A - A = A + (-A)$ gdzie $A = [5,4,3,2]$ i $-A = [-5, -4, -3, -2]$

Definicja 10. Mnożenie liczby vOFN przez skalar²⁰

Niech będą dane dwie skierowane liczby rozmyte $A = (\rightarrow F_A, \rightarrow G_A)$ i $C = (\rightarrow F_C, \rightarrow G_C)$ oraz skalar $r \in R$. Mówimy, że C jest iloczynem A przez skalar r , jeżeli

$$\forall_{\mu \in [0,1]} [r \cdot \vec{F}_A = \vec{F}_C \wedge r \cdot \vec{G}_A = \vec{G}_C] \quad (6)$$



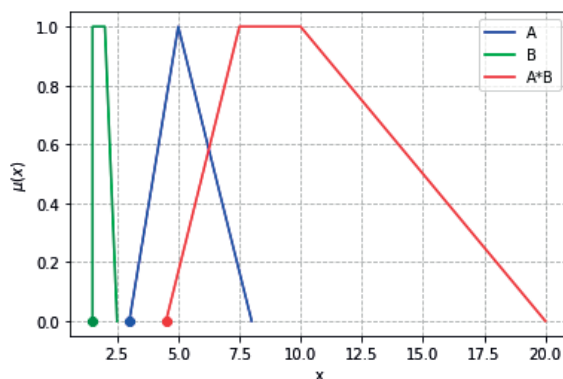
Rysunek 7. Wynik mnożenia liczby vOFN A przez skalar $r=2$, gdzie $C = r \cdot A = 2 \cdot [0,1,3,4] = [0,2,6,8]$

²⁰ E. Szmidt, J. Kacprzyk, *Distances between intuitionistic fuzzy sets*, "Fuzzy Sets and Systems" 2000, 114, 505-518; L. Trana, L. Ducksteinb, *Comparison of fuzzy numbers using a fuzzy distance measure*, "Fuzzy Sets and Systems" 2002, 130, 331-341.

Definicja 11. Iloczyn liczb vOFN

Niech będą dane trzy skierowane liczby rozmyte $A = (\rightarrow F_A, \rightarrow G_A)$, $B = (\rightarrow F_B, \rightarrow G_B)$ i $C = (\rightarrow F_C, \rightarrow G_C)$. Mówimy, że C jest iloczynem liczb A i B ($C = A * B$), jeżeli

$$\forall_{\mu \in [0,1]} [\vec{F}_A \cdot \vec{F}_B = \vec{F}_C \wedge \vec{G}_A \cdot \vec{G}_B = \vec{G}_C] \quad (7)$$

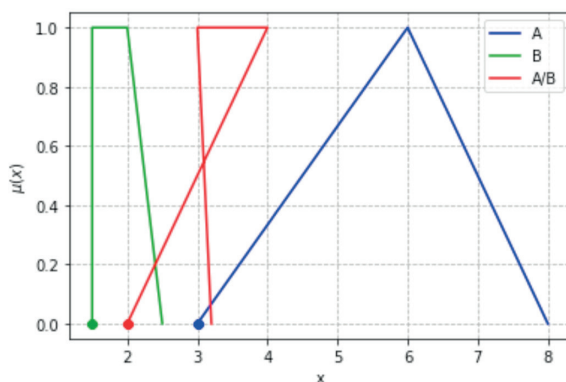


Rysunek 8. Iloczyn $C=A*B$ liczb vOFN $A = [3, 5, 5, 8]$ i $B = [1.5, 1.5, 2, 2.5]$ daje wynik $C=[4.5,7.5,10,20.0]$

Definicja 12. Iloraz liczb vOFN

Niech będą dane trzy skierowane liczby rozmyte $A = (\rightarrow F_A, \rightarrow G_A)$, $B = (\rightarrow F_B, \rightarrow G_B)$ i $C = (\rightarrow F_C, \rightarrow G_C)$. Mówimy, że C jest wynikiem dzielenia A przez B zapisywanym $C = A/B$, jeśli

$$\forall_{\mu \in [0,1]} [\vec{F}_A / \vec{F}_B = \vec{F}_C \wedge \vec{G}_A / \vec{G}_B = \vec{G}_C] \quad (8)$$



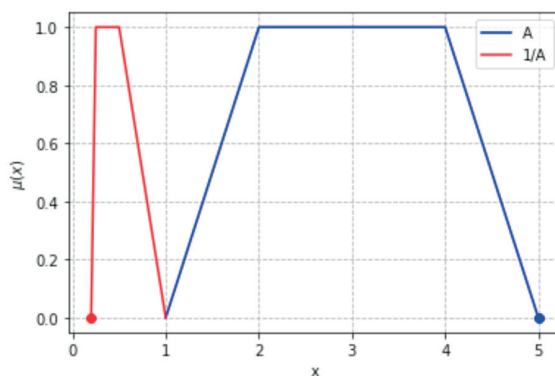
Rysunek 9. Iloraz $C=A/B$ liczb vOFN $A = [3, 6, 6, 8]$ i $B = [1.5, 1.5, 2, 2.5]$ daje wynik $C = [2.0, 4.0, 3.0, 3.2]$

Dzielenie jest mnożeniem przez liczbę odwrotną. Wprowadźmy zatem definicję liczby odwrotnej w notacji OFN.

Definicja 13. Liczba odwrotna vOFN

Niech będą dane dwie skierowane liczby rozmyte $A = (F_A, G_A)$, $A^{-1} = (F_{A^{-1}}, G_{A^{-1}})$. Mówimy wtedy, że liczba odwrotna A^{-1} do danej skierowanej liczby rozmytej $A = (F_A, G_A)$, to liczba postaci:

$$A^{-1} = [a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, d^{-1}] \quad (9)$$



Rysunek 10. Liczby vOFN $A=[5,4,2,1]$ oraz $1/A=[0.2, 0.25, 0.5, 1]$

Definicja 14. Potęga liczby vOFN

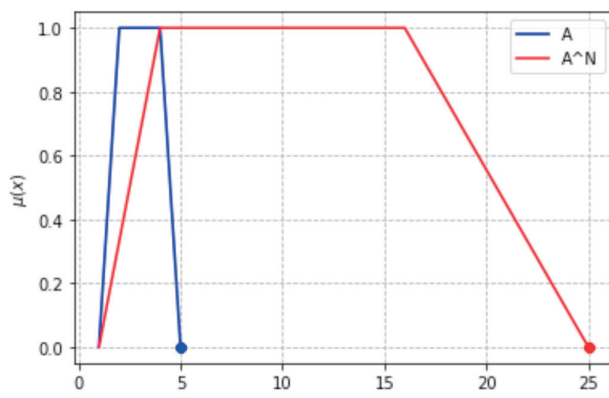
Niech będą dane dwie wektorowe skierowane liczby rozmyte $A = (\rightarrow F_A, \rightarrow G_A)$ i $C = (\rightarrow F_C, \rightarrow G_C)$ oraz skalar n . Załóżmy, że liczba A definiowana jest jako $A = [a, b, c, d]$. Mówimy, że C jest wynikiem podnoszenia liczby A do potęgi n , $C = A^n$, jeśli

$$A^n = [a^n, b^n, c^n, d^n] = [a, b, c, d] * [a, b, c, d] * \dots * [a, b, c, d] \quad (10)$$

przy zastrzeżeniu, że:

$$A^0 = [a^0, b^0, c^0, d^0] = [1, 1, 1, 1] \text{ oraz}$$

$$A^1 = [a^1, b^1, c^1, d^1] = [a, b, c, d] = A.$$



Rysunek 11. Podnoszenie liczby vOFN A do potęgi n, gdy $A = [5, 4, 2, 1]$ i $n=2$, daje wynik $C = [25, 16, 4, 1]$

Jak widać powyżej prowadzenie wszelkich operacji arytmetycznych jest w notacji vOFN spójne i konsekwentne. Można zatem prowadzić zaawansowane rachunki w zaprezentowanej arytmetyce w różnych zastosowaniach zarówno w sterowaniu rozmytym jak i we wszelkich rodzajach obserwacji rozmytej.

2. Rozwiązanie problemu porównywania liczb rozmytych w notacji OFN oraz vOFN

Po wprowadzeniu operacji arytmetycznych w notacji wektorowej skierowanych liczb rozmytych warto przyjrzeć się problemowi porównywania tychże liczb. Porównywanie liczb rozmytych odgrywa kluczową rolę w procesach sterowania. Jednakże jest to zagadnienie o znacznym stopniu złożoności. Pomimo, że porównywanie obiektów jest istotne dla wielu zastosowań w tej dziedzinie, wciąż nie udało się jednoznacznie sformalizować podstawowych pojęć takich jak podobieństwo czy zawieranie, nad którymi to zagadnieniami pracowali m.in. Adabitar²¹, Khorshidi i Nikfalayar²² i Dabashree²³. Część badaczy zajmujących się logiką rozmytą dąży do precyzyjnego zdefiniowania tych pojęć, podczas gdy inni kwestionują to podejście, argumentując, że narzucanie sztywnych ram może ograniczyć praktyczne zastosowania. Przez lata rozwoju logiki rozmytej wielu badaczy opracowywało metody porównań zbiorów i liczb rozmytych. Wśród nich nie sposób nie przywołać prac badawczych, które były realizowane

²¹ R. Yager, A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval, "Inform. Sciences" 1981, 24, 143-161.

²² H. Zarzycki, Application of the finite difference method to value derivatives, "Studies and Proceedings of Polish association for Knowledge Management" 2011, 42, 267-277.

²³ S. Zadrozny, J. Kacprzyk, On the use of linguistic summaries for text categorization, "Proceedings of IPMU" 2004, pp. 1373-1380.

od 1977 r. przez Zadeha, Yagera, Kaufmana, Changa i Amado²⁴. Bortolan, Degani i Dadgostar dokonując w obecnym już wieku przeglądu niektórych metod porównywania zbiorów rozmytych [50], wybrali powszechnie znanych badaczy i ich metody, uwzględniając m.in. pierwszy, drugi i trzeci indeks Yagera, algorytm Changa i metody Amado²⁵. W zestawieniu tym znalazły się również metody Baasa i Kwakernaaka, metody Baldwina i Guilda metoda Kerre'a [53]. Innym znanym podejściem jest metoda Jaina oraz oczywiście zaproponowany przez Dubois i Prade, klasyków dziedziny, zestaw czterech faktorów (NSD, ND, PSD, PD) [4]. W roku 2010 ukazał się artykuł, w którym Dadgostar i Kerr²⁶ zaproponowali spójną metodę o nazwie Partial Comparison Method (PCM). W kolejnych latach m.in. Wang i Kerre podjęli się zadania sformułowania reguł i aksjomatów, które miały uporządkować sposoby porównywania liczb rozmytych. Zastosowanie tych kryteriów pozwoliło autorom dokonać systematycznego porównania szerokiej gamy rozmytych metod rankingowych²⁷. W kolejnych latach pojawiły się nowe podejścia do problemu porównywania liczb rozmytych. Wśród nich można wymienić wspomniane we wstępie prace Dobrosielskiego i Czerniaka²⁸, którzy w 2018 r. zaproponowali użycie kilku autorskich operatorów wyostrażania w procesie porównywania liczb rozmytych w notacji OFN.

W niniejszym paragrafie przedstawiona zostanie nowa miara podobieństwa. Nawiązuje ona do propozycji Carberry wzmiankowanej w poprzednim paragrafie. Należy jednak podkreślić, że nowa miara niweluje wrażliwość metryki na wartości bliskie zera, która w mierze Carberry była istotną niedogodnością. Metryka JC jest dedykowana do porównywania skierowanych liczb rozmytych, choć po zignorowaniu elementów definicji, które odnoszą się do specyfiki OFN, mogłaby być stosowana w innych arytmetykach liczb rozmytych.

Nawiązując do podanej w poprzednim paragrafie definicji wektorowej skierowanej liczby rozmytej wiemy, że liczba OFN jest uporządkowaną parą wektorów zbocza narastającego f oraz zbocza opadającego g . W dalszej części rozważań, aby

²⁴ L. Zadeh, *Outline of new approach to the analysis of complex systems and decision process*, "IEEE on Systems, Man and Cybernetics" 1973, SMC-3, 28-44.

²⁵ Tamże.

²⁶ W. Guixiang, L. Jing, *Approximations of fuzzy numbers by step type fuzzy numbers*, "Fuzzy Sets and Systems" 2017, 310, 47-59.

²⁷ Y. Wang, Y. Luo, *Area ranking of fuzzy numbers based on positive and negative ideal points*, "Comput. Math. Appl." 2009, 58, 1763-1779; T. Hajjari, *A new improved method for comparing fuzzy numbers by centroid point*. "Journal of Mathematical Extension" 2016, 10 (2), 1-23.

²⁸ W. Dobrosielski, J. Czerniak, J. Szczepanski, H. Zarzycki, *Two new defuzzification methods useful for different fuzzy arithmetics*, in: et al., A.K. (ed.) *Uncertainty and Imprecision in Decision Making and Decision Support: Cross-Fertilization, New Models and Applications*. IWIFSGN 2016, "Advances in Intelligent Systems and Computing" 2018, vol. 559, pp. 83-101.

były one czytelne zarówno dla oryginalnej notacji OFN jak i vOFN, odwoływać się będziemy początkami i końcami wspomnianych wektorów czyniąc z nich współrzędne charakterystyczne dla liczb OFN/vOFN tj. $A[f_{A(0)}, f_{A(1)}, g_{A(1)}, g_{A(0)}]$.

Lemat 1.

Niech będą dane dwie liczby OFN A i B, z których każda reprezentowana jest przez zbiór czterech wartości granicznych funkcji zbocza narastającego i opadającego, co dla liczby A stanowi zbiór $\{f_{A(0)}, f_{A(1)}, g_{A(1)}, g_{A(0)}\}$, a dla liczby B natomiast $\{f_{B(0)}, f_{B(1)}, g_{B(1)}, g_{B(0)}\}$. Porównanie liczb A i B polega na obliczaniu wartości metryki JC wyrażonej poniższym wzorem.

$$JC = \sum_{i=0}^1 \frac{f_{A(i)} - f_{B(i)}}{|f_{A(i)}| + |f_{B(i)}|} + \sum_{i=0}^1 \frac{g_{A(i)} - g_{B(i)}}{|g_{A(i)}| + |g_{B(i)}|}, \quad (11)$$

gdzie uwzględnić należy warunek, iż $|f_{A(i)}| + |f_{B(i)}| = 0$ lub $|g_{A(i)}| + |g_{B(i)}| = 0$.

W przypadku spełnienia tego warunku, należy zastosować przesunięcie afiniczne obu liczb OFN w kierunku narastania osi OX. Realizuje się to poprzez dodanie wartości 1 do każdej ze współrzędnych obu liczb. Zabieg ten należy stosować aż do zaniku wartości zero w każdym mianowniku.

Definicja 15.

Jeżeli wartość metryki JC przyjmuje wartość 0 i obie liczby rozmyte A i B mają jednakowe skierowanie, oznacza to, że obie liczby są równe.

Definicja 16.

Jeżeli wartość metryki JC przyjmuje wartość 0 i liczby rozmyte A i B mają przeciwne skierowanie, wtedy większą jest liczba skierowana pozytywnie.

Definicja 17.

Jeżeli wartość metryki $JC < 0$, wtedy liczba rozmyta A jest mniejsza niż liczba B. Dzieje się tak niezależnie od skierowania liczb rozmytych A i B.

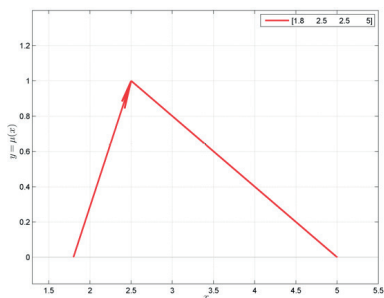
Definicja 18.

Jeżeli wartość metryki $JC > 0$, wtedy liczba rozmyta A jest większa od liczby B. Dzieje się tak niezależnie od skierowania liczb rozmytych A i B.

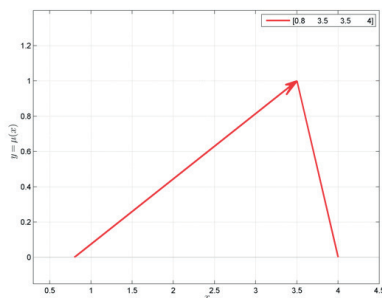
2.1. Zastosowanie operatora porównań liczb rozmytych JC

Z literatury przedmiotu można przywołać kilka liczb rozmytych powszechnie stosowanych do sprawdzenia operatorów porównań. Liczby te zapisane w notacji OFN wraz z wykresami przedstawiono na Rysunku 12. Dobór liczb jest nieprzypadkowy, widać wśród tego zestawu zarówno liczby rozłączne jak i zawierające

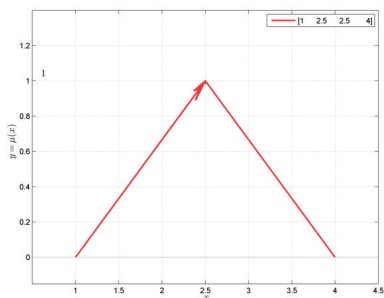
się jedna w drugiej, co stanowić może pewne wyzwanie w interpretacji, które nie pojawia się w dziedzinie liczb rzeczywistych.



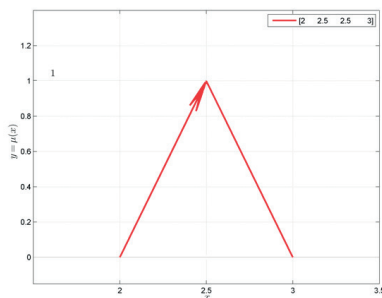
Liczba rozmyta A[1.8, 2.5, 2.5, 5.0]



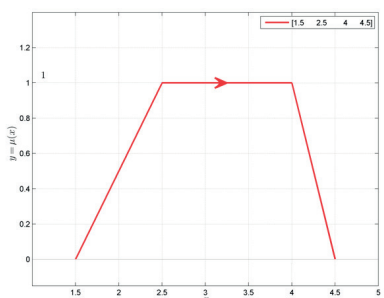
Liczba rozmyta B[0.8, 3.5, 3.5, 4.0]



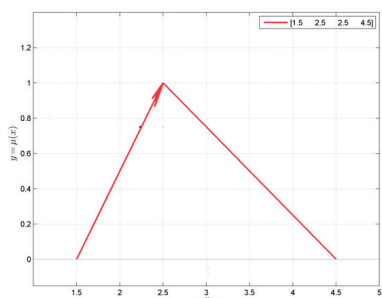
Liczba rozmyta C[1.0, 2.5, 2.5, 4.0]



Liczba rozmyta D[2.0, 2.5, 2.5, 3.0]



Liczba rozmyta E[1.5, 2.5, 4.0, 4.5]



Liczba rozmyta F[1.5, 2.5, 2.5, 4.5]

Rysunek 12. Zestaw liczb rozmytych używanych w testowaniu operatorów porównań

Zastosowanie metryki JC opisanej w poprzednim paragrafie pozwoli na dokonanie porównania wartości liczb rozmytych i ich klasyfikacji. Każdej parze porównywanych liczb zostanie przyporządkowana liczba będąca odpowiadającą im wartością metryki JC. Po zastosowaniu reguł rozpoznawania podobieństwa sformułowanych w definicjach podanych w poprzednim paragrafie możliwe będzie określenie relacji, jakie zachodzą pomiędzy poszczególnymi parami liczb rozmytych. Dla podanych powyżej liczb rozmytych oraz dla innych zaczerpniętych z literatury przedmiotu wyliczono poniżej wartości metryki JC. Na końcu dodano również parę liczb, których wartości dobrano w sposób generujący błąd dzielenia przez zero. Taki scenariusz zdarzeń został przewidziany w definicji i odpowiednia reguła została tam zastosowana.

$$A[3.0,3.5,3.5,4.0]$$

$$JC_{HI} = -0,19 \rightarrow H < I$$

$$B[4.0,4.5,4.5,5.0]$$

$$J[1.5,2.5,4.0,4.5]$$

$$JC_{AB} = -0,50 \rightarrow A < B$$

$$K[1.5,2.5,2.5,4.5]$$

$$C[1.8,2.5,2.5,5.0]$$

$$L[1.5,2.5,2.5,3.5]$$

$$D[0.8,3.5,3.5,4.0]$$

$$JC_{JK} = 0,23 \rightarrow J > K$$

$$JC_{CD} = 0,16 \rightarrow C > D$$

$$JC_{KL} = 0,13 \rightarrow K > L$$

$$E[2.0,4.5,4.5,5.0]$$

$$JC_{LJ} = -0,36 \rightarrow L < J$$

$$F[2.0,3.5,3.5,5.0]$$

$$P[0.0, -2.0, 2.0, 0.0]$$

$$G[2.0,2.5,2.5,5.0]$$

$$Q[0.0, 0.0, 0.0, 0.0]$$

$$JC_{EF} = 0,25 \rightarrow E > F$$

$$JC_{PQ} = \text{błąd dzielenia przez 0}$$

$$JC_{FG} = 0,33 \rightarrow F > G$$

$$P'[1.0, -1.0, 3.0, 1.0]$$

$$JC_{GE} = -0,57 \rightarrow G < E$$

$$Q'[1.0, 1.0, 1.0, 1.0]$$

$$H[1.0,2.5,2.5,4.0]$$

$$JC_{P'Q'} = -0,50 \rightarrow P < Q$$

$$I[2.0,2.5,2.5,3.0]$$

Jak widać powyżej, wszystkie wyliczenia umożliwiły jednoznaczne określenie relacji pomiędzy poszczególnymi skierowanymi liczbami rozmytymi. Ostatnia para porównywanych liczb, jakimi były P i Q, wygenerowała błąd dzielenia przez zero. Zgodnie z warunkiem w Lemacie 1, konieczne było zastosowanie przesunięcia afinicznego obu liczb względem osi OX. Uzyskane w ten sposób nowe liczby P' i Q' nie wykazują już błędu i możliwe jest wyliczenie metryki.

Otrzymane w poprzednim paragrafie wyniki są jednoznaczne i interpretacja ich nie przynosi problemów. Prawidłowe sformułowanie Lematu 1 skutkuje możliwością rozwiązania nieokreśloności spowodowanej przez błąd dzielenia przez zero, który może pojawić się w trakcie obliczeń metryki JC. Zabezpieczenie to było od razu uwzględnione podczas projektowania metryki. Mimo, iż metryka JC działa dla równych wartości liczb rozmytych znajdujących się w różnych przedziałach wartości, właściwym byłoby porównać wyniki uzyskane dzięki jej działaniu z pomysłami innych naukowców. Na Rysunku 13 przedstawiono zestawienie działania metryki JC z innymi metodami. Generalnie interpretacja wyników jest następująca, większa wartość faktora wskazuje liczbę większą wg danej metryki. Jest to zestawienie koncepcji, których działanie jest zbliżone do porównywania wyostrzonych wartości liczb rozmytych, co nie było celem autorów niniejszej publikacji. Metryka JC, jak już opisano powyżej, umożliwia porównanie dwóch liczb rozmytych bez ich wyost్రzania czy quasi wyost్రzania. Innymi słowy nie zmienia się dziedziny z liczb rozmytych na liczby rzeczywiste w celu wykonania porównania.

Autor	Metoda	A, B	C, D	E, F	E, G	G, E	H, I	J, K	K, L	L, J
Czerniak	JC	A<B	C>D	E>F	F>G	G<E	H<I	J>K	K>L	L<J
Dobrosielski	GR	A<B	C>D	E<F	F=G	G>E	H>I	J=K	K>L	L<J
	ML	A>B	C>D	E>F	F=G	G<E	H=I	J>K	K>L	L<J
Yager	TR	A<B	C<D	E<F	F>G	G>E	H<I	J>K	K<L	L<J
	F1	A<B	C>D	E>F	F>G	G<E	H=I	J>K	K>L	L<J
	F2	A<B	C<D	E>F	F>G	G<E	H>I	J>K	K>L	L<J
	F3	A<B	C>D	E>F	F>G	G<E	H=I	J>K	K>L	L<J
Chang	CH	A<B	C>D	E>F	F>G	G<E	H>I	J>K	K>L	L<J
Adamo	0.9M	A<B	C<D	E>F	F>G	G<E	H>I	J>K	K>L	L<J
	0.9m	A<B	C<D	E>F	F>G	G<E	H>I	J>K	K>L	L<J
	0.5	A<B	C>D	E>F	F>G	G<E	H>I	J>K	K>L	L<J
Baas-Kwakernaak	BK	A<B	C<D	E>F	F>G	G<E	H=I	J=K	K=L	L=J
Baldwin-Guild	lap	A<B	C>D	E>F	F>G	G<E	H<I	J>K	K>L	L<J
	g	A<B	C>D	E>F	F>G	G<E	H>I	J>K	K>L	L<J
Kerre	ra	A<B	C>D	E>F	F>G	G<E	H<I	J>K	K>L	L<J
	K	A<B	C>D	E>F	F>G	G<E	H=I	J>K	K>L	L<J
Jain	k=1	A<B	C<D	E>F	F>G	G<E	H>I	J>K	K>L	L<J
	k=2	A<B	C>D	E>F	F>G	G<E	H>I	J>K	K>L	L<J
	k=0.5	A<B	C<D	E<F	F>G	G<E	H>I	J>K	K>L	L<J
Dubois-Prade	PD	A<B	C<D	E>F	F>G	G<E	H=I	J=K	K=L	L=J
	PSD	A<B	C>D	E>F	F>G	G<E	H>I	J>K	K>L	L<J
	ND	A<B	C>D	E>F	F>G	G<E	H<I	J=K	K=L	L=J
Lee-Li	NSD	A<B	C<D	E>F	F=G	G<E	H=I	J=K	K=L	L=J
	Um	A<B	C>D	E>F	F>G	G<E	H=I	J>K	K>L	L<J
Dadgostar-Kerr	Pm	A<B	C<D	E>F	F>G	G<E	H=I	J>K	K>L	L<J
	PCM	A<B	C>D	E>F	F>G	G<E	H=I	J>K	K>L	L<J
Dorohonceanu-Marin	B2	A<B	C>D	E>F	F>G	G<E	H=I	J>K	K>L	L<J
	B2x	A<B	C>D	E>F	F>G	G<E	H=I	J>K	K>L	L<J

Rysunek 13. Zestawienie wyników różnych metod porównywania liczb rozmytych

2.3 Podsumowanie koncepcji operatora porównań liczb vOFN i OFN

Przedstawione w tym paragrafie badania dotyczą nowej metody rozwiązania problemu porównywania liczb rozmytych. Jak przedstawiono w powyższych paragrafach istnieje wiele podejść do rozwiązania tego zagadnienia. Większość z nich jawnie lub niejawnie prowadzi do opuszczenia dziedziny liczb rozmytych i porównanie wykonuje w dziedzinie liczb rzeczywistych. Autorzy postawili sobie za cel przygotowanie operatora porównań, który nie zmieni dziedziny, w której wykonywane są operacje relacyjne. Zaproponowany operator porównań działa intuicyjnie na liczbach rozmytych, podobnie jak analogiczne operatory w innych systemach liczbowych. Zaproponowana metryka JC została przetestowana na liczbach, które w cytowanych publikacjach inni autorzy wykorzystali do sprawdzenia swoich operatorów. W części eksperymentalnej artykułu obliczenia wykonano na liczbach w notacji OFN skierowanych pozytywnie. Z właściwości liczb OFN wiadomo, że liczby te zachowują się identycznie do liczb klasycznych. Rezultaty, jakie uzyskano w procesie porównania wybranego zestawu liczb rozmytych, potwierdzają dobre działanie operatora. Wyniki nie wykazały żadnych anomalii, metryka JC określiła liczby w takiej samej relacji, w jakiej ustaliła je większość innych autorów w swoich podejściach. Należy zatem uznać, że zaproponowany operator porównań JC jest skutecznym sposobem wykrywania podobieństw i różnic pomiędzy liczbami rozmytymi bez opuszczania dziedziny liczb rozmytych. Ponadto obliczenia te nie są skomplikowane i nawet wielokrotne ich wykonywanie nie będzie kosztowne obliczeniowo. Wstępne eksperymenty, które przeprowadzili autorzy wykazują, że zaproponowane podejście działa również w innych notacjach liczb rozmytych. Jednakże ma to znaleźć pełne potwierdzenie w dalszych pracach badawczych. Do dalszych badań pozostaje kwestia przetestowania metryki JC w pełnym spektrum liczb OFN, chociaż zamieszczony w pracy przykład, jak i inne wykonane eksperymenty wskazują, że nie należy spodziewać się żadnych problemów.

3. Rozwiązanie problemu niewypukłych kształtów liczb OFN/vOFN

Jakkolwiek definiowana, skierowana liczba rozmyta jest, zgodnie z zamysłem twórców [41][42][43], generalizacją możliwych kształtów i przybiera postać trapezu. Omówione zostało to dość dokładnie w poprzednich paragrafach. Określoną w Definicji 2 funkcję przynależności można wykorzystać w regułach sterowania w sposób podobny do wykorzystania przynależności klasycznych liczb rozmytych [43][44]. Wszystkie wielkości występujące w sterowaniu rozmytym opisują wybrany element rzeczywistości [45]. Proces określania tej wartości nazywany

jest obserwacją rozmytą. Niestety, jak wielokrotnie podają autorzy [8][46][47], operacje arytmetyczne, mimo iż zawsze możliwe, w domenie OFN napotyka trudności w interpretacji wśród reprezentacji liczb, o których zwykło mówić się, że są niewłaściwe. Liczby niewłaściwe to np. takie, które mają $\text{supp}(A) < \text{core}(A)$. Oznacza to, że podstawa liczby jest mniejsza od jej rdzenia. Interpretacja tego typu liczby jest dyskusyjna, jednak liczba o takim kształcie może być wynikiem obliczeń lub argumentem do obliczeń. Aby rozwiązań tego typu problem, autorzy zaproponowali metodę o nazwie Shape Normalization Operator (SNO).

3.1. Matematyczne podstawy operatora SNO

Notacja OFN, jak już wspomniano, umożliwia w konsekwencji swoich założeń istnienie liczb niewłaściwych. W ogólności są to liczby, których współrzędne (w rozumieniu OFN) nie wykazują jednorodnego trendu zgodnego z kierunkiem osi OX lub do niej jednorodnie przeciwnego. Tak powstałych liczb nie sposób zinterpretować przy użyciu klasycznych notacji, a w samej notacji OFN autorzy uchylają się od ich jednoznacznej klasyfikacji. Uporządkowaniu tego stanu rzeczy posłużą poniższe definicje.

Niech Z będzie przestrzenią liczb rozmytych. Liczba rozmyta $A \in Z$ jest opisana przez cztery liczby rzeczywiste: a, b, c, d np. $A[a, b, c, d]$. Liczby te są nazywane współrzędnymi A .

Definicja 18. Singleton notacji OFN/vOFN

Dla dowolnego $a \in R$ liczba rozmyta $A[a, a, a, a]$ jest nazywana singletonem. Zbiór singletonów oznaczamy symbolem S . Wyróżnijmy trzy podzbiory P, Q, T przestrzeni Z , zdefiniowane przez

$$\begin{aligned} P &= \{A \in Z : a \neq b\}, \\ Q &= \{A \in Z : a = b \wedge a \neq c\}, \\ T &= \{A \in Z : a = b = c \wedge a \neq d\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Oczywiście zbiory P, Q, T i S są parami rozłączne. Rodzina $F = \{P, Q, T, S\}$ jest rozbiciem przestrzeni Z tzn. $A = P \cup Q \cup T \cup S$.

Definicja 19. Skierowanie liczby OFN

Niech dana będzie skierowana liczba rozmyta $A \in Z$ opisana przez cztery liczby rzeczywiste $A[a, b, c, d]$. Skierowanie liczby rozmytej A w notacji OFN ustala się w następujący sposób:

- liczba $A \in P$ ma skierowanie pozytywne, jeśli $a < b$, w przeciwnym wypadku skierowane A jest negatywne,

- liczba $A \in Q$ ma skierowanie pozytywne, jeśli $a < c$, w przeciwnym wypadku skierowane A jest negatywne,
- liczba $A \in T$ ma skierowanie pozytywne, jeśli $a < d$, w przeciwnym wypadku skierowane A jest negatywne.

Definicja 20. Operator normalizacji kształtu liczby OFN

Niech dany będzie operator $\Psi: A \rightarrow A$ taki, że $\Psi(A) = \Psi(a, b, c, d)$ równa się:

- $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, jeżeli skierowanie A jest pozytywne,
 - $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, jeżeli skierowanie A jest negatywne,
- gdzie
- $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ jest permutacją (a, b, c, d) taką, że $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4$, czyli

$$\alpha_1 = \min\{a, b, c, d\},$$

$$\alpha_2 = \min\{\{a, b, c, d\} \setminus \{\alpha_1\}\},$$

$$\alpha_3 = \min\{\{a, b, c, d\} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2\}\},$$

$$\alpha_4 = \max\{a, b, c, d\}$$

oraz

$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ jest permutacją (a, b, c, d) tak, że $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3 \geq \beta_4$.

Innymi słowy $\beta_1 = \max\{a, b, c, d\}$,

$$\beta_2 = \max\{\{a, b, c, d\} \setminus \{\beta_1\}\},$$

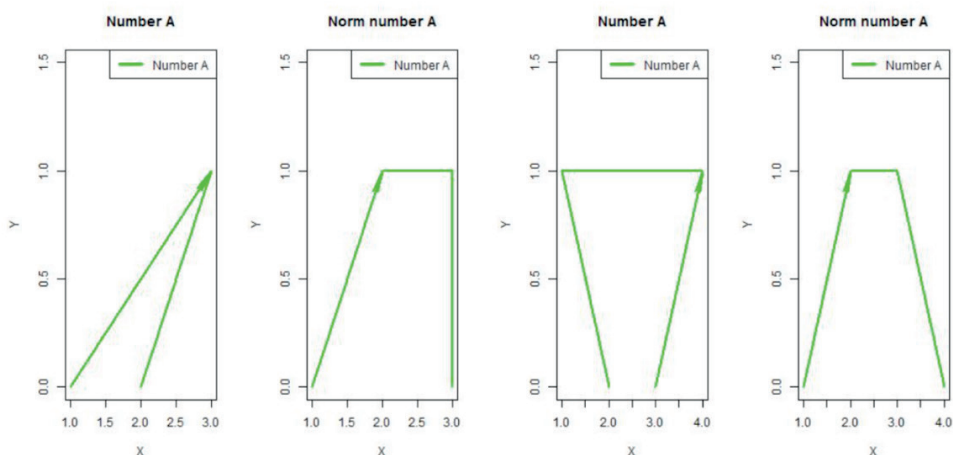
$$\beta_3 = \max\{\{a, b, c, d\} \setminus \{\beta_1, \beta_2\}\},$$

$$\beta_4 = \min\{a, b, c, d\}.$$

Operator Ψ na zbiorze S jest odwzorowaniem tożsamościowym, tzn. $\forall A \in S, \Psi(A) = A$.

3.2. Katalog kształtów liczb OFN

W publikacji książkowej Czerniaka [40] znajduje się katalog wszystkich 256 możliwych kształtów, jakie może przyjąć liczba $A[a, b, c, d]$ w notacji OFN. Przy czym, jak podano w paragrafie z podstawami matematycznymi, każda ze współrzędnych a, b, c, d należy do zbioru R liczb rzeczywistych, a kolejność ich ma znaczenie. W związku z tym, że zbiór kształtów jest ograniczony wystarczy przedstawić go dla podzbioru $r \in R$, takiego, że $\forall a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4\}$. Poniżej przedstawiono przykładowy zestaw liczb OFN o charakterystycznych kształtach, jakie powszechnie uważa się za niewłaściwe. Tego typu kształty liczb rozmytych wprowadzają konfuzje wśród niektórych badaczy. Na każdej z nich wykonano operację normalizacji $SON(A)$. W efekcie uzyskano zbiór liczb rozmytych w notacji vOFN, który pozbawiony jest liczb niewłaściwych. Każda z liczb jest zrozumiała i możliwa do jednoznacznej interpretacji.



Rysunek 14. Normalizacja liczb OFN $A1[1,3,3,2]$ oraz $A2[3,4,1,2]$

Proces normalizacji doprowadzić musi do uzyskania ze wszystkich kształtów liczb tzw. kształtów właściwych. W efekcie tego zabiegu uzyskano tylko kształty liczb, w których wartość $\text{core}(A)$ była nie większa niż wartość $\text{supp}(A)$. Tego typu liczby nadają się do interpretacji w każdych warunkach, a towarzyszące im skierowanie w notacji vOFN pozwala nieść większą ilość informacji niż w innych notacjach. Z przeprowadzonych eksperymentów wynika, iż normalizacja dotyczy 12,7% liczb możliwych. Liczby właściwe nie zostają zmienione przez operator SNO, tak samo jak singleton. Co do zasady z obserwacji eksperymentu normalizacji widać, iż liczby normalizują się jednakowo niezależnie od skierowania. Jednakże, skierowanie oryginalne jest zapisywane i nadawane liczbie po normalizacji, gdyż niesie pożądaną i kluczową w vOFN informację o trendzie.

Konkluzja

W artykule przedstawiono redefinicję Skierowanych Liczb Rozmytych Kosińskiego (ang. Ordered Fuzzy Numbers, OFN). Zaproponowano podejście za pomocą wektorów definiując Wektorowe Skierowane Liczby Rozmyte (ang. Vectorial Ordered Fuzzy Numbers, vOFN). Zastąpiono definicję liczby OFN jako uporządkowanej pary funkcji definicją, która traktuje liczbę vOFN jako uporządkowaną parę wektorów. Podejście to skutkuje rozwiązaniem problemów niewystępujących w innych notacjach liczb rozmytych, jak choćby notacja LR Dubois i Prade, gdzie nigdy nie dochodzi do zmiany charakterystyki zboczy z prostoliniowych na krzywoliniowe. Jednocześnie podejście vOFN dziedziczy wszystkie pozytywne elementy notacji OFN zaproponowanej przez Kosińskiego.

Ta arytmetyka jest pełnym pierścieniem, co zapewnia uzyskanie elementów neutralnych zarówno w operacjach sumy i różnicy, jak również w ilorazie i iloczynie. Operacje w notacji vOFN respektują zarówno liczby trapezoidalne jak i trójkątne oraz singletony. Charakterystyczna dla notacji OFN przewaga pozwalająca uzyskać dobre wyniki dla operacji $C=A+B$ i operacji odwrotnej $X=C-A$ zawsze przynosi $X=B$, co z zasady nie jest możliwe w notacji LR, zostaje przeniesiona naturalnie do notacji vOFN. Reasumując można powiedzieć, że zaproponowana w artykule notacja vOFN dziedziczy wszystkie pozytywne aspekty arytmetyki OFN oraz usuwa jej dyskusyjne właściwości. Oczywiście charakterystyczne dla arytmetyki OFN skierowanie przeniesione zostało do notacji vOFN. Jest ono powszechnie kojarzone z trendem zmian, jakim towarzyszy obserwacja rozmyta i pozwala w jednej liczbie przenieść dodatkową informację właśnie o kierunku zmian. Autorzy mają nadzieję, że tak odświeżona definicja arytmetyki OFN ze względu na swoją prostotę, konsekwencję i łatwość implementacji uzyska wiele praktycznych zastosowań w najbliższych latach.

References

Bibliografia

- Abbasbandy S., Asady B., *Ranking of fuzzy numbers by sign distance*, "Inform. Sciences" 2006, 176, 2405–2416.
- Adabitabar F.M., Fath-Tabar G., Eslampia Z., *The similarity measure of generalized fuzzy numbers based on interval distance*, "Applied Mathematics Letters" 2012, 25(10), 1528–1534.
- Apiecionek L., Czerniak J.M., Ewald D., *New qos concept for protecting network resources*, in: Choras, R.S. (ed.) *Image Processing and Communications Challenges 8, Proceedings of 8th International Conference, IP&C, September 2016*, Bydgoszcz 2017, pp. 234–239.
- Asady B., Zendehnam A., *Ranking fuzzy numbers by distance minimization*, "Applied Mathematical Modelling" 2007, 31, 2589–2598.
- Baumgart J., Sangho B., *A case study of the effectiveness of new methods of swarm optimization compared to known methods*, "Studies and Materials in Applied Computer Science" 2021, 13(1), 47–50, ISSN 1689-6300.
- Bucko R., Vince T., Molnar J., Dziak J., Gladyr A., *Safety system for intelligent building*, "International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES)" 2017, pp. 252–255.
- Cheng C., *A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method*, "Fuzzy Sets Syst." 1998, 95, 307–317.
- Czerniak J., Ewald D., Macko M., Smigielski G., Tyszczyk K., *Approach to the monitoring of energy consumption in eco-grinder based on abc optimization*, "Beyond Databases, Architectures And Structures, BDAS" 2015, 521, 516–529.
- Czerniak J.M., *Ofnant method based on tsp ant colony optimization*, in: Prokopowicz P., Czerniak J.M., Mikołajewski D., Apiecionek L., Slezak D. (eds.) *Theory and Applications of Ordered Fuzzy Numbers. A Tribute to Professor Witold Kosinski*, chap. 12, "Studies in Fuzziness and Soft Computing" 2017, pp. 207–222.

- Czerniak J.M., *Ordered fuzzy numbers applied in selected swarm optimization algorithms*, Bydgoszcz 2019.
- Czerniak J.M., Dobrosielski W.T., Filipowicz I., *Comparing fuzzy numbers using defuzzifiers on ofn shapes*, in: Prokopowicz P., Czerniak J.M., Mikołajewski D., Apiecionek L., Slezak D. (eds.) *Theory and Applications of Ordered Fuzzy Numbers. A Tribute to Professor Witold Kosinski*, chap. 6, "Studies in Fuzziness and Soft Computing" 2017, pp. 207-222.
- Czerniak J.M., Zarzycki H., *Artificial acari optimization as a new strategy for global optimization of multimodal functions*, "Journal of Computational Science" 2017.
- Czerniak J.M., Zarzycki H., Apiecionek L., Palczewski W., Kardasz P., *A cellular automata-based simulation tool for real fire accident prevention*, "Mathematical Problems in Engineering" 2018, 1-12 (3058241).
- Czerniak J.M., Zarzycki H., Ewald D., *AAO as a new strategy in modeling and simulation of constructional problems optimization*, "Simulation Modelling Practice and Theory" 2017, pp. – .
- Czerniak J., Filipowicz I., Ewald D., *The novel shape normalization operator for fuzzy numbers in ofn notation*, in: Kacprzyk J., e.a. (ed.) *Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017. IWIFSGN 2017, EUSFLAT 2017, "Advances in Intelligent Systems and Computing"* 2018, vol. 641, pp. 548-562.
- Czerniak J., Macko M., Ewald D., *The cutmag as a new hybrid method for multi- edge grinder design optimization*, "Advances in Intelligent Systems and Computing" 2016, 401, 327-337.
- Czerniak J., Smigielski G., Ewald D., Paprzycki M., *New proposed implementation of abc method to optimization of water capsule fligh.*, "Proceedings of the Federated Conference on Computer Science and Information Systems, IEEE Digital Library" 2015, AC- SIS 5 (489-493).
- Debashree G., Debjani C., *A new approach to fuzzy distance measure and similarity measure between two generalized fuzzy numbers*, "Applied Soft Computing" 2010, 10(1), 90-99.
- Dobrosielski W.T., Czerniak J.M., Zarzycki H., Szczepanski J., *Fuzzy numbers applied to a heat furnace control*, in: Prokopowicz P., Czerniak J.M., Mikołajewski D., Apiecionek L., Slezak D. (eds.) *Theory and Applications of Ordered Fuzzy Numbers. A Tribute to Professor Witold Kosinski*, chap. 16, "Studies in Fuzziness and Soft Computing" 2017, pp. 207-222.
- Dobrosielski W., Czerniak J., Szczepanski J., Zarzycki H., *Two new defuzzification methods useful for different fuzzy arithmetics*, in: et al., A.K. (ed.) *Uncertainty and Imprecision in Decision Making and Decision Support: Cross-Fertilization, New Models and Applications. IWIFSGN 2016.*, "Advances in Intelligent Systems and Computing" 2018, vol. 559, pp. 83-101.
- Dorohonceanu B., Marin B., *A simple method for comparing fuzzy numbers*, 2002.
- Dyczkowski K., *A less cumulative algorithm of mining linguistic browsing patterns in the world wide web*, 2007.
- Ewald D., Czerniak J., Zarzycki H., *Ofnbee method used for solving a set of benchmarks*, in: Kacprzyk J., e.a. (ed.) *Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017. IWIF- SGN 2017, EUSFLAT 2017, "Advances in Intelligent Systems and Computing"* 2018, vol. 642, pp. 24-35.
- Ewald D., Czerniak J.M., Paprzycki M., *A new ofnbee method as an example of fuzzy observance applied for abc optimization*, in: Prokopowicz P., Czerniak J.M., Mikołajewski D., Apiecionek L., Slezak D. (eds.) *Theory and Applications of Ordered Fuzzy Numbers. A Tribute to Professor Witold Kosinski*, chap. 12, "Studies in Fuzziness and Soft Computing" 2017, pp. 207-222.
- Ewald D., Zarzycki H., Czerniak J.M., *Certain aspects of the ofnbee algorithm operation for different fuzzifiers*, in: Atanassov K.T., Atanassova V., Kacprzyk J., Kaluszko A., Krawczak M., Owsiniński J.W., Sotirov S.S., Sotirova E., Szmidt E., Zadrozny S. (eds.) *Uncertainty and Imprecision in Decision Making and Decision Support: New Advances, Challenges, and Perspectives*, Cham 2022, pp. 241-256.
- Galas K., *Drive unit as a replacement for the platform*. "Studies and Materials in Applied Computer Science" 2020, 12(1), 10-14.

- Guixiang W., Jing L., *Approximations of fuzzy numbers by step type fuzzy numbers*, "Fuzzy Sets and Systems 310" 2017, 47-59.
- Hajjari T., *A new improved method for comparing fuzzy numbers by centroid point*, "Journal of Mathematical Extension" 2016, 10(2), 1-23.
- Jacko P., Kovac D., Bucko R., Vince T., Kravets O., *The parallel data processing by nucleo board with stm32 microcontrollers*, "International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES)" 2017, pp. 264-267.
- Kacprzyk J., Wilbik A., *Using fuzzy linguistic summaries for the comparison of time series: an application to the analysis of investment fund quotations*, "IFSA/EUSFLAT Conf." 2009, pp. 1321-1326.
- Khorshidi H.A., Nikfalazar S., *An improved similarity measure for generalized fuzzy numbers and its application to fuzzy risk analysis*, "Applied Soft Computing" 2017, 52, 478-486.
- Kosinski W., *On fuzzy number calculus*. "International Journal of Applied Mathematics and Computer Science" 2006, 16(1), 51-57.
- Kosinski W., *On soft computing and modeling. Image Processing Communication, An International Journal with special section: Technologies of Data Transmission and Processing*, held in 5th "International Conference INTERPOR" 2006 11(1), 71-82.
- Kosinski W., Frischmuth K., Wilczynska-Sztyma D., *A New Fuzzy Approach to Ordinary Differential Equations*, in: Rutkowski L., Scherer R., Tadeusiewicz R., Zadeh L.A., Zurada J.M. (eds.) *Proceedings of CAISC2010, Part I*, "Lecture Notes in Computer Science" 2010, vol. 6113, pp. 120-127.
- Kosinski W., Prokopowicz P., Slezak D., *On algebraic operations on fuzzy numbers*, in: Kłopotek M.A., Wierzbach S.T., Trojanowski K. (eds.) *Intelligent Information Processing and Web Mining: Proceedings of the International IIS: IIPWM'03 Conference held in Zakopane, Poland, June 2-5, 2003*, Springer, Berlin, Heidelberg 2003, pp. 353-362.
- Kosinski W., Słysz P., *Fuzzy Numbers and Their Quotient Space with Algebraic Operations*, "Bulletin of Polish Academy of Sciences: Mathematics" 1993, 41(3), 285-295.
- Macko M., Szczepanski Z., Mikołajewski D., Mikołajewska E., Listopadzki S., *The method of artificial organs fabrication based on reverse engineering in medicine*, 2017, pp. 353-365.
- Marszałek A., Burczynski T., *Modeling and forecasting financial time series with ordered fuzzy candlesticks*, "Information Science" 2014, 273, 144-155.
- Mikołajewska E., Prokopowicz P., Mikołajewski D., *Computational gait analysis using fuzzy logic for everyday clinical purposes - preliminary findings*, "Bio-Algorithms and Med-Systems" 2017, 13(1), 37-42.
- Namli Ö.B., Tyburek K., *Research of the efficiency of the reach of fire services to accidents in the city of kocaeli on the basis of statistical data for the years 2013-2020*, "Studies and Materials in Applied Computer Science" 2022, 14(3), 1-5.
- Piegat A., Plucinski M., *Computing with words with the use of inverse rdm models of membership functions*, "International Journal of Applied Mathematics and Computer Science" 2015, 25(3), 675-688.
- Piszcz A., Mikołajewski D., *Application for the android platform with the system as a solution to the right problem horse nutrition*, "Studies and Materials in Applied Computer Science" 2020, 12(1), 5-9, ISSN 1689-6300.
- Prokopowicz P., Czerniak J., Mikołajewski D., Apiecionek L., Slezak D., *Theory and Applications of Ordered Fuzzy Numbers. A Tribute to Professor Witold Kosiński*, "Studies in fuzziness and soft computing" 2017, vol. 356.
- Prokopowicz P., Mikołajewski D., Mikołajewska E., Kotlarz P., *Fuzzy system as an assessment tool for analysis of the health-related quality of life for the people after stroke*, in: Rutkowski L., Korytkowski M., Scherer R., Tadeusiewicz R., Zadeh L., Zurada J. (eds.) *Artificial In-*

- telligence And Soft Computing, ICAISC 2017, PT I. "Lecture Notes in Artificial Intelligence"* 2017, vol. 10245, pp. 710-721.
- Rezvani S., *Ranking generalized fuzzy numbers with euclidian distance by the incentre of centroid*, "Mathematica Aeterna" 2013, 3, 103-114.
- Sangho B., *Comparison of selected wolf pack algorithms used in solving optimization problems*. "Studies and Materials in Applied Computer Science" 2021, 13(1), 17-32, ISSN 1689-6300.
- Stachowiak A., Dyczkowski K., *A similarity measure with uncertainty for incompletely known fuzzy sets. Proceedings Of The 2013 Joint IFSA World Congress and NAFIPS Annual Meeting (IFSA/NAFIPS)*, 2013, pp. 390-394.
- Szmidt E., Kacprzyk J., *Distances between intuitionistic fuzzy sets*, "Fuzzy Sets and Systems" 2000, 114, 505-518.
- Trana L., Ducksteinb L., *Comparison of fuzzy numbers using a fuzzy distance measure*, "Fuzzy Sets and Systems" 2002, 130, 331-341.
- Vince T., Lukac P., Schweiner D., Tomcikova I., Mamchur D., *Android application supporting developed web applications testing*, "International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES)" 2017, pp. 392-395.
- Wang Y., Luo Y., *Area ranking of fuzzy numbers based on positive and negative ideal points*, "Comput. Math. Appl." 2009, 58, 1763-1779.
- Yager R., *A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval*, "Inform. Sciences" 1981, 24, 143-161.
- Zadeh L., *Outline of new approach to the analysis of complex systems and decision process*, "IEEE on Systems, Man and Cybernetics" 1973, SMC-3, 28-44.
- Zadrozny S., Kacprzyk J., *On the use of linguistic summaries for text categorization*, in: *Proceedings of IPMU*, 2004, pp. 1373-1380.